

Exercicis

★ Aplicació directa

1. Llegir una equació d'ona

Per una corda es propaga una ona d'equació $y(x, t) = 0,05 \cdot \sin(10\pi \cdot t - 2\pi \cdot x)$, en unitats SI. Determina:

- a) l'amplitud, la freqüència, el període i la longitud d'ona;
- b) la velocitat de propagació i el sentit;
- c) la velocitat màxima d'un punt de la corda.

▼ Solució

- a) $A = 0,05 \text{ m}$; $\omega = 10\pi \text{ rad/s} \rightarrow f = \omega/2\pi = 5 \text{ Hz}$, $T = 1/f = 0,2 \text{ s}$; $k = 2\pi \text{ rad/m} \rightarrow \lambda = 2\pi/k = 1 \text{ m}$.
- b) $v = \lambda \cdot f = 1 \cdot 5 = 5 \text{ m/s}$ (també $\omega/k = 10\pi/2\pi$). El signe $-$ davant de $k \cdot x$ indica que es propaga cap a les x positives.
- c) $v_{y,\max} = A \cdot \omega = 0,05 \cdot 10\pi = 1,57 \text{ m/s}$.

2. Escriure l'equació d'una ona

Una ona transversal de 3,0 cm d'amplitud i 60 cm de longitud d'ona es propaga per una corda a 12 m/s en el sentit negatiu de l'eix x . En $t = 0$, el punt $x = 0$ és a l'equilibri i puja.

- a) Calcula la freqüència i el període.
- b) Escriu l'equació de l'ona.

▼ Solució

- a) $f = v/\lambda = 12/0,60 = 20 \text{ Hz}$; $T = 1/f = 0,050 \text{ s}$.
- b) $\omega = 2\pi \cdot f = 40\pi = 125,7 \text{ rad/s}$; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,60 = 10\pi/3 = 10,5 \text{ rad/m}$. Cap a $-x$, el signe és $+$; amb $y(0, 0) = 0$ pujant, $\varphi_0 = 0$: $y(x, t) = 0,030 \cdot \sin(40\pi \cdot t + (10\pi/3) \cdot x) \text{ m}$.

3. El so canvia de medi

Un diapasó emet un so de 440 Hz a l'aire. Part del so entra a l'aigua d'una piscina. ($v_{\text{aire}} = 340 \text{ m/s}$; $v_{\text{aigua}} = 1480 \text{ m/s}$)

- a) Quina és la freqüència del so a l'aigua?
- b) Calcula la longitud d'ona a l'aire i a l'aigua.

▼ Solució

- a) La freqüència la fixa la font: **440 Hz** també a l'aigua.
- b) $\lambda_{\text{aire}} = 340/440 = 0,773 \text{ m}$; $\lambda_{\text{aigua}} = 1480/440 = 3,36 \text{ m}$. La λ creix en la mateixa proporció que la velocitat.

4. Intensitat i decibels d'una font

Un altaveu petit emet 0,10 W de potència sonora per igual en totes direccions. ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$)

- a) Calcula la intensitat i el nivell d'intensitat sonora a 10 m.
- b) Quin nivell hi ha a 20 m?

▼ Solució

- a) $I = P/(4\pi \cdot r^2) = 0,10/(4\pi \cdot 10^2) = 7,96 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$; $\beta = 10 \cdot \log(7,96 \cdot 10^{-5}/10^{-12}) = 79,0 \text{ dB}$.
- b) Amb el doble de distància, la intensitat es divideix per 4: $I = 1,99 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$ i $\beta = 79,0 - 10 \cdot \log 4 = 73,0 \text{ dB}$.

5. La corda d'una guitarra

Una corda de guitarra de 65 cm entre els dos punts fixos té una freqüència fonamental de 110 Hz.

- a) Calcula la velocitat de les ones a la corda.
- b) Calcula les freqüències del segon i del tercer harmònic, i la longitud d'ona del tercer.

▼ Solució

- a) Fonamental: $L = \lambda_1/2 \rightarrow \lambda_1 = 2L = 1,30 \text{ m}$; $v = \lambda_1 \cdot f_1 = 1,30 \cdot 110 = 143 \text{ m/s}$.
- b) $f_n = n \cdot f_1$: $f_2 = 220 \text{ Hz}$, $f_3 = 330 \text{ Hz}$; $\lambda_3 = 2L/3 = 0,433 \text{ m}$.

★★ Combinació de conceptes

6. Diferència de fase entre punts

Per una corda es propaga una ona de 50 Hz a 20 m/s.

- a) Quina diferència de fase hi ha entre dos punts separats 10 cm?
- b) A quina distància mínima hi ha un punt en fase amb un de donat? I en oposició de fase?
- c) Quina diferència de fase té un mateix punt entre dos instants separats 5,0 ms?

▼ Solució

- a) $\lambda = v/f = 20/50 = 0,40 \text{ m}$; $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \Delta x / \lambda = 2\pi \cdot 0,10 / 0,40 = \pi/2 \text{ rad}$.
- b) En fase: $\Delta x = \lambda = 0,40 \text{ m}$. En oposició: $\Delta x = \lambda/2 = 0,20 \text{ m}$.
- c) $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,0050 = \pi/2 \text{ rad}$ (5 ms és $T/4$).

7. Dos altaveus: on se sent i on no

Dos altaveus connectats al mateix amplificador emeten en fase un so de 680 Hz. ($v_{so} = 340 \text{ m/s}$)

- a) En un punt P, a 3,00 m d'un altaveu i a 3,75 m de l'altre, hi ha interferència constructiva o destructiva?
- b) I en un punt Q, a 4,00 m i a 5,00 m?
- c) Quina és la freqüència més baixa per a la qual a P hi hauria silenci?

▼ Solució

- a) $\lambda = v/f = 340/680 = 0,500 \text{ m}$; $\Delta r = 0,75 \text{ m} = 1,5 \cdot \lambda$, un nombre semienter de λ : **destructiva** (silenci).
- b) $\Delta r = 1,00 \text{ m} = 2 \cdot \lambda$: **constructiva**.
- c) La primera condició de destrucció és $\Delta r = \lambda/2 \rightarrow \lambda = 2 \cdot 0,75 = 1,50 \text{ m} \rightarrow f = 340/1,50 = 227 \text{ Hz}$.

8. Un tub d'orgue

Un tub d'orgue de 85 cm està obert per un extrem i tancat per l'altre. ($v_{so} = 340 \text{ m/s}$)

- a) Calcula la freqüència fonamental i la dels dos harmònics següents que pot emetre.
- b) Si s'obre l'extrem tancat, quina és la nova freqüència fonamental? Quins harmònics apareixen?

▼ Solució

- a) Node al fons i ventre a la boca: $L = \lambda_1/4 \rightarrow f_1 = v/(4L) = 340/(4 \cdot 0,85) = \mathbf{100 \text{ Hz}}$. Només harmònics senars: **300 Hz i 500 Hz**.
- b) Obert pels dos extrems: $f_1 = v/(2L) = \mathbf{200 \text{ Hz}}$, i hi ha tots els harmònics: 400 Hz, 600 Hz...

9. Una ona estacionària de tres fusos

Una corda d'1,20 m fixada pels dos extrems vibra a 60 Hz formant una ona estacionària amb 4 nodes, comptant els dels extrems.

- a) Quin harmònic és? Calcula la longitud d'ona i la velocitat de propagació.
- b) Calcula la freqüència fonamental i la distància entre un node i el ventre del costat.
- c) A quina freqüència vibraria amb 5 fusos?

▼ Solució

- a) 4 nodes són 3 fusos: $n = 3$. $\lambda = 2L/3 = \mathbf{0,80 \text{ m}}$; $v = \lambda \cdot f = 0,80 \cdot 60 = \mathbf{48 \text{ m/s}}$.
- b) $f_1 = f_3/3 = \mathbf{20 \text{ Hz}}$; node-ventre $= \lambda/4 = \mathbf{0,20 \text{ m}}$.
- c) $f_5 = 5 \cdot f_1 = \mathbf{100 \text{ Hz}}$.

10. Un violí, dos violins, deu violins

Un violí que toca sol produeix un nivell d'intensitat sonora de 60 dB en un punt de la sala.

- a) Quin nivell hi haurà si toquen dos violins iguals?
- b) Quants violins calen per arribar a 70 dB?
- c) Quin nivell produeix un sol violí al doble de distància (ona esfèrica, sense absorció)?

▼ Solució

- a) La intensitat es duplica: $\beta = 60 + 10 \cdot \log 2 = \mathbf{63,0 \text{ dB}}$ (no 120 dB).
- b) +10 dB vol dir intensitat $\times 10$: calen **10 violins**.
- c) Al doble de distància I es divideix per 4: $\beta = 60 - 10 \cdot \log 4 = \mathbf{54,0 \text{ dB}}$.

PAU Problemes de les PAU

45 problemes de les PAU de Catalunya, ordenats de més fàcil a més difícil. Cada apartat porta la puntuació oficial i, a la solució, com la reparteix la pauta de correcció. Els enunciats són els oficials de les PAU de Catalunya (Generalitat de Catalunya), reproduïts d'acord amb les condicions de reutilització de la informació del sector públic; cada problema enllaça a l'examen original.

11. Del violí a l'aire: el so del primer harmònic ★

PAU Setembre 2021 · Sèrie 1 · P3

La corda d'un violí fa 32 cm de llarg i vibra amb una freqüència fonamental de 196 Hz.

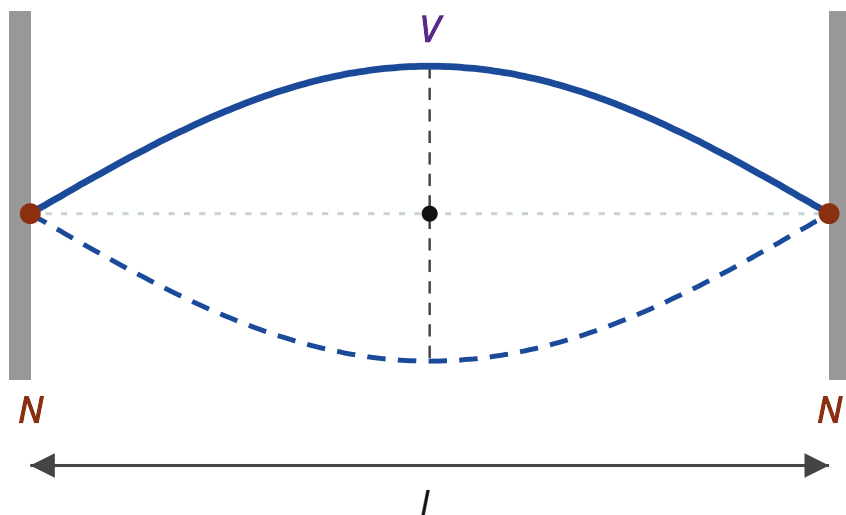
- a) Quina és la longitud d'ona del primer harmònic (fonamental)? Justifiqueu la resposta. Representeu el segon harmònic i indiqueu-hi la posició dels nodes i els ventres. [1,25 punts]
- b) Quina és la freqüència i la longitud d'ona del so que és produït pel primer harmònic del violí i que es propaga per l'aire? [1,25 punts]

Dada: La velocitat del so en l'aire és de 340 m s^{-1} .

▼ Solució

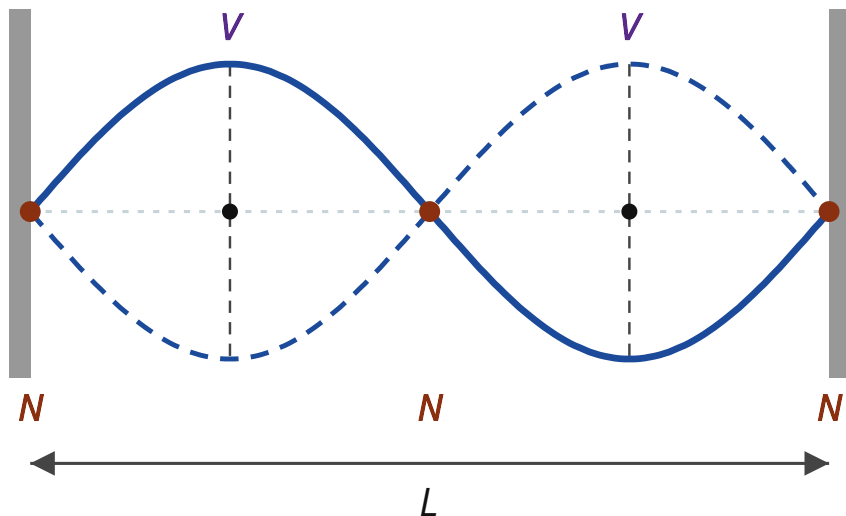
a)

Longitud d'ona del fonamental. Els extrems de la corda estan fixos i són nodes. En el mode fonamental hi ha només aquests dos nodes i un ventre al centre, de manera que la longitud de la corda és mitja longitud d'ona: $L = \lambda/2 \rightarrow \lambda = 2L = 2 \cdot 32 \text{ cm} = 64 \text{ cm} = 0,64 \text{ m}$.



Primer harmònic (fonamental): 2 nodes i 1 ventre; dins la corda hi cap mitja longitud d'ona. Les línies contínua i discontinua són les dues posicions extremes de la corda; N = node, V = ventre.

Segon harmònic. El segon harmònic té **tres nodes** (els dos extrems i el centre, a 16 cm) i **dos ventres** (a $L/4 = 8 \text{ cm}$ i $3L/4 = 24 \text{ cm}$ d'un extrem).



Segon harmònic: 3 nodes (extrems i centre) i 2 ventres (a $L/4$ i $3L/4$). Les línies contínua i discontinua són les dues posicions extremes de la corda; N = node, V = ventre.

Com puntua la pauta

0,6 Justificar que dins la corda hi ha mitja longitud d'ona (dos nodes als extrems i un ventre) i obtenir $\lambda = 2L = 0,64$ m.

0,65 Representar el segon harmònic amb tres nodes i dos ventres.

b)

Freqüència del so a l'aire. La corda fa vibrar l'aire amb la seva mateixa freqüència, i la freqüència d'una ona no canvia quan passa d'un medi a un altre: $f = 196$ Hz.

Longitud d'ona a l'aire. El que canvia és la velocitat i, per tant, la longitud d'ona: $\lambda = v/f = 340/196 = 1,73$ m.

Com puntua la pauta

0,65 Indicar que la freqüència no canvia en canviar de medi: $f = 196$ Hz.

0,6 Calcular la longitud d'ona a l'aire, $\lambda = v/f = 1,73$ m.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

12. Cinc violins: quants decibels més? ★

PAU Setembre 2021 · Sèrie 1 · P6

Un violinista interpreta un solo durant un concert. De cop i volta, quatre violins més l'acompanyen, tocant amb la mateixa intensitat que el primer.

- a) Quants decibels ha augmentat el nivell d'intensitat del so? [1,25 punts]
- b) Ara els cinc violins passen de *mezzo piano* a *forte* i mesurem un nivell d'intensitat del so de 76,98 dB. Suposant que tots els violins toquen amb la mateixa intensitat, quina és la intensitat I amb la qual toca un sol violí? [1,25 punts]

Dada: $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

▼ Solució

a)

Nivell d'un sol violí. Si un violí produeix una intensitat I , el nivell inicial és $\beta_i = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

Nivell dels cinc violins. Les intensitats de fonts independents se sumen: amb cinc violins iguals la intensitat és $5I$ i $\beta_f = 10 \cdot \log(5I/I_0)$.

Augment del nivell. $\Delta\beta = \beta_f - \beta_i = 10 \cdot [\log(5I/I_0) - \log(I/I_0)] = 10 \cdot \log 5 = 6,99 \text{ dB}$. Fixeu-vos que no depèn de quina sigui la intensitat I .

Com puntua la pauta

0,3 Escriure el nivell d'un sol violí, $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

0,4 Escriure el nivell dels cinc violins, amb intensitat $5I$.

0,4 Restar els dos nivells i arribar a $\Delta\beta = 10 \cdot \log 5$.

0,15 Resultat: 6,99 dB.

b)

Intensitat d'un violí. Els cinc violins junts fan una intensitat $5I$: $76,98 = 10 \cdot \log(5I/I_0) \rightarrow 5I/I_0 = 10^{7,698} \rightarrow I = 10^{-12} \cdot 10^{7,698}/5 = 9,98 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

Com puntua la pauta

1 Plantejar $76,98 = 10 \cdot \log(5I/I_0)$ i aïllar la intensitat d'un violí.

0,25 Resultat: $I = 9,98 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

13. Un gos que borda, i després dos ★

PAU Juny 2018 · Sèrie 1 · P4 · Opció B

Un gos borda amb una potència de 2,00 mW.

- a) Si aquest so es distribueix uniformement per l'espai, quin és el nivell d'intensitat sonora (en dB) a una distància de 5,00 m? [1 punt]
- b) Si en comptes d'un gos, fossin dos gossos bordant alhora, quin seria el nivell d'intensitat sonora? [1 punt]

Dada: Intensitat del llindar d'audició (0 dB), $I_0 = 1,00 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

▼ Solució

a)

Nivell d'intensitat. $L_1 = 10 \cdot \log(I_1/I_0)$; primer cal la intensitat a 5,00 m.

Intensitat. La potència es reparteix uniformement sobre una esfera de radi r : $I_1 = P/(4\pi r^2) = 2,00 \cdot 10^{-3} / (4\pi \cdot 5,00^2) = 6,37 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

Nivell. $L_1 = 10 \cdot \log(6,37 \cdot 10^{-6} / 1,00 \cdot 10^{-12}) = 68,0 \text{ dB}$.

Com puntua la pauta

0,2 Escriure la definició del nivell d'intensitat sonora, $L = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

0,4 Calcular la intensitat a 5,00 m, $I = P/(4\pi r^2) = 6,37 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

0,4 Obtenir el nivell, 68,0 dB.

b)

Dos gossos. Les intensitats de les dues fonts se sumen: $I_2 = 2I_1$. Aleshores $L_2 = 10 \cdot \log(2I_1/I_0) = 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log(I_1/I_0) = 10 \cdot \log 2 + L_1$.

Resultat. $L_2 = 3,0 + 68,0 = 71,0 \text{ dB}$. També es pot fer amb una potència de 4,00 mW: $I_2 = 1,27 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$, que dona el mateix nivell.

Com puntua la pauta

0,8 Veure que la intensitat es duplica i expressar $L_2 = 10 \cdot \log 2 + L_1$ (o calcular-ho amb $P = 4 \text{ mW}$).

0,2 Obtenir $L_2 = 71,0 \text{ dB}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

14. Boies marines: longitud d'ona i equació de l'ona ★

PAU Setembre 2016 · Sèrie 1 · P3 · Opció B

Les boies marines s'utilitzen sovint per a mesurar l'alçària de l'onatge. Una d'aquestes boies es mou seguint una oscil·lació harmònica de 3,00 m d'amplitud i 0,10 Hz de freqüència i l'ona es propaga a una velocitat de $0,50 \text{ m s}^{-1}$.

- a) Calculeu la longitud d'ona i el nombre d'ona. [1 punt, segons la pauta]
- b) Escriviu l'equació de les ones que fan moure la boia suposant que la fase inicial és zero. [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. $\lambda = v/f = 0,50/0,10 = 5,0 \text{ m}$.

Nombre d'ona. $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/5,0 = 0,4\pi \text{ m}^{-1} \approx 1,26 \text{ m}^{-1}$.

Com puntua la pauta

0,5 Calcular la longitud d'ona, $\lambda = v/f = 5,0 \text{ m}$.

0,5 Calcular el nombre d'ona, $k = 2\pi/\lambda = 0,4\pi \text{ m}^{-1}$.

b)

Forma general. Amb fase inicial zero, l'elongació vertical de cada punt de la superfície és $y(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$, en què x és la posició en la direcció de propagació.

Freqüència angular. $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,10 = 0,2\pi \text{ rad/s} \approx 0,63 \text{ rad/s}$.

Equació amb valors.

$y(x, t) = 3,00 \cdot \sin(0,4\pi x - 0,2\pi t) = 3,00 \cdot \sin[0,2\pi(2x - t)]$, amb x i y en m i t en s.

Com puntua la pauta

0,2 Plantejar l'equació $y(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$ i calcular $\omega = 2\pi f = 0,2\pi \text{ rad/s}$.

0,8 Escriure l'equació amb els valors, $y(x, t) = 3,00 \cdot \sin(0,4\pi x - 0,2\pi t)$ en unitats del SI.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

15. La veu d'una soprano: longituds d'ona i potència ★

PAU Juny 2015 · Sèrie 4 · P5 · Opció A

El terme musical *soprano* es refereix a la veu més aguda, característica del sexe femení. El rang vocal típic d'aquesta veu és de més de dues octaves, del do_3 (261,7 Hz) al re_5 (1 174,7 Hz).

- a) Calculeu les longituds d'ona dels sons més greu i més agut que pot emetre una cantant *soprano*.
[1 punt, segons la pauta]
- b) En una actuació, un espectador situat a 10,0 m d'una *soprano* percep un nivell d'intensitat sonora de 80 dB. Calculeu la potència d'aquest so. [1 punt, segons la pauta]

Dades: Intensitat del llindar d'audició (0 dB), $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$

Velocitat del so en l'aire = 340 m s^{-1}

▼ Solució

a)

Longitud d'ona i freqüència. En l'aire totes les freqüències es propaguen a la mateixa velocitat, de manera que $\lambda = v/f$: com més aguda és la nota, més curta és la longitud d'ona.

So més agut i so més greu. $\lambda_{\text{agut}} = 340/1\,174,7 = 0,290 \text{ m}$

$\lambda_{\text{greu}} = 340/261,7 = 1,30 \text{ m}$

Com puntua la pauta

0,2 Escriure la relació $\lambda = v/f$.

0,8 Calcular les dues longituds d'ona: 0,290 m (re_5) i 1,30 m (do_3).

b)

Del nivell a la intensitat. $L_I = 10 \cdot \log(I/I_0) \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{L_I/10}$.

Intensitat a 10,0 m. $I = 10^{-12} \cdot 10^8 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

Potència i intensitat. La potència es reparteix sobre una esfera centrada en la soprano, de radi igual a la distància a l'espectador: $P = I \cdot A = I \cdot 4\pi R^2$.

Potència del so. $P = 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 10,0^2 = 0,126 \text{ W}$.

Com puntua la pauta

0,1 Escriure la definició del nivell d'intensitat i aïllar-ne I.

0,4 Calcular la intensitat, $I = 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

0,2 Relacionar potència i intensitat a través de l'àrea d'una esfera, $P = I \cdot A$.

0,3 Calcular la potència, $P = I \cdot 4\pi R^2 = 0,126 \text{ W}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

16. Un altaveu de 300 Hz: Doppler i reflexió ★

PAU Setembre 2012 · Sèrie 4 · P4 · Opció B

La membrana d'un altaveu vibra amb una freqüència de 300 Hz i una amplitud de 1,00 mm i produeix un to pur. En les condicions de l'experiment, la velocitat del so és 340 m s^{-1} .

- a) Calculeu la longitud d'ona, la pulsació i el període del so produït. [1 punt, segons la pauta]
- b) Indiqueu com seran, qualitativament, la freqüència i la longitud d'ona enregistrades per un observador en cada un dels casos següents, comparades (més gran / més petit / igual) amb la freqüència i la longitud d'ona originals:
- L'altaveu s'acosta ràpidament a l'observador.
 - El so arriba a l'observador després d'haver-se reflectit en una paret. [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. El so té la freqüència de la membrana, $\nu = 300 \text{ Hz}$. De $\nu = \lambda \cdot \nu$: $\lambda = \nu / \nu = 340 / 300 = 1,13 \text{ m}$.

Pulsació. $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 300 = 1,88 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$.

Període. $T = 1/\nu = 1/300 = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Com puntua la pauta

0,4 Calcular $\lambda = \nu / \nu = 1,13 \text{ m}$.

0,3 Calcular $\omega = 2\pi\nu = 1,88 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$.

0,3 Calcular $T = 1/\nu = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

b)

L'altaveu s'acosta. És l'efecte Doppler: la font avança cap a l'observador mentre emet, i els fronts d'ona que li arriben queden més junts. L'observador enregistra una freqüència més gran i una longitud d'ona més petita que les originals.

Reflexió en una paret. En la reflexió el so només canvia la direcció de propagació: continua en el mateix medi, amb la mateixa velocitat, i la freqüència la fixa la font.

La freqüència i la longitud d'ona són iguals que les originals.

Com puntua la pauta

0,5 Font que s'acosta: freqüència més gran i longitud d'ona més petita, justificat amb l'efecte Doppler o amb els fronts d'ona.

0,5 Reflexió: no canvien ni la freqüència ni la longitud d'ona, perquè no hi ha canvi de medi i només canvia la direcció de propagació.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Freddie Mercury ha passat a la història com una de les millors veus del rock. La seva màgica veu ha estat objecte de discussió i estudi, també per a la ciència. El biofísic austríac Christian Herbst va estudiar la veu del cantant de Queen i va determinar que Mercury era un baríton amb un registre vocal que anava del fa 2 (al voltant de 92,2 Hz) al sol 5 (al voltant de 784 Hz).

Font: <https://queenphotos.wordpress.com>.

- a) Calculeu les longituds d'ona dels sons més greus i més aguts que Mercury podia emetre.
[1,25 punts]
- b) L'any 1985, Queen va actuar al festival Rock in Rio, en un concert que va aplegar unes 350 000 persones. En un moment de molta emoció, els assistents van començar a cantar *a cappella* la famosa cançó *Love of my life*. Si cada assistent al concert cantava amb una potència de 10^{-7} W, quin nivell d'intensitat sonora (en decibels) es podia percebre a 1 km del concert? (A aquesta distància, podeu considerar que el concert és una font puntual de so.) [1,25 punts]

Dades: $I_0 = 10^{-12}$ W m⁻².

La velocitat del so en l'aire és de 340 m s⁻¹.

▼ Solució

a)

So més agut. La longitud d'ona és inversament proporcional a la freqüència, $\lambda = v/f$; el so més agut (784 Hz) té la longitud d'ona més curta: $\lambda_{\min} = 340/784 = 0,43$ m.

So més greu. El so més greu (92,2 Hz) té la longitud d'ona més llarga: $\lambda_{\max} = v/f = 340/92,2 = 3,69$ m.

Com puntua la pauta

0,65 Calcular la longitud d'ona del so més agut, $\lambda = v/f = 0,43$ m.

0,6 Calcular la longitud d'ona del so més greu, 3,69 m.

b)

Superfície on es reparteix el so. Si el concert es comporta com una font puntual, a una distància $r = 1\,000$ m la potència es distribueix sobre una esfera: $A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1\,000^2 = 1,26 \cdot 10^7$ m².

Intensitat a 1 km. Les potències de tots els assistents se sumen, i la intensitat és la potència per unitat de superfície: $I = N \cdot P_{\text{persona}} / A = 350\,000 \cdot 10^{-7} / 1,26 \cdot 10^7 = 2,78 \cdot 10^{-9}$ W/m².

Nivell d'intensitat sonora. $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0) = 10 \cdot \log(2,78 \cdot 10^{-9} / 10^{-12}) = 34,45$ dB.

Com puntua la pauta

0,25 Calcular la superfície de l'esfera de radi 1 km, $1,26 \cdot 10^7$ m².

0,5 Calcular la intensitat amb la potència total dels assistents, $2,78 \cdot 10^{-9}$ W/m².

0,5 Calcular el nivell d'intensitat sonora, $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0) = 34,45$ dB.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

18. El tercer harmònic d'una corda de violoncel ★

PAU Juny 2019 · Sèrie 1 · P4 · Opció B

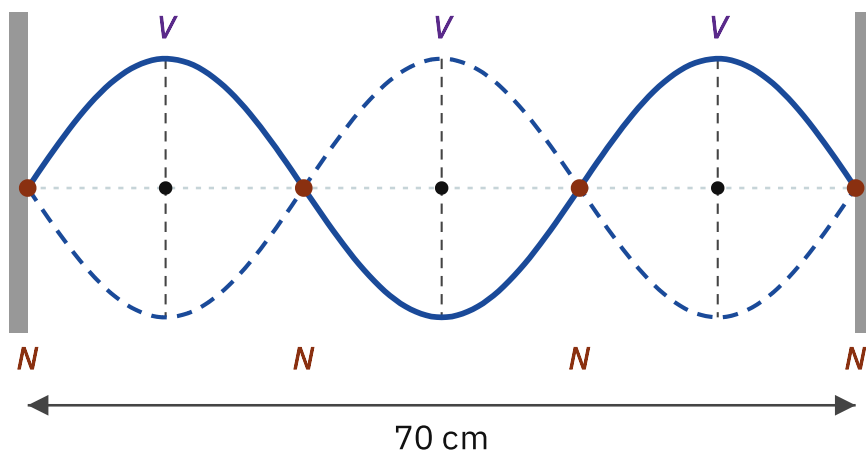
La longitud de la corda d'un violoncel és de 70 cm i la velocitat de propagació de les ones en aquesta corda és de 308 m s^{-1} . Per al tercer harmònic:

- a) Representeu esquemàticament l'ona estacionària d'aquest harmònic i indiqueu-hi tots els nodes i tots els ventres. Calculeu la longitud d'ona. Quina és la distància entre dos nodes consecutius? [1 punt]
- b) Suposant que la corda està en posició horitzontal, calculeu, per a un ventre, el temps que triga la posició vertical a passar del seu valor màxim al valor mínim (del punt més alt al punt més baix). [1 punt]

▼ Solució

a)

Esquema de l'harmònic. Els dos extrems de la corda estan subjectes, de manera que sempre hi ha un node a cada extrem. En el tercer harmònic la corda vibra en tres fusos: hi ha **3 ventres** i **4 nodes** (els dos extrems i dos d'interns, a $L/3$ i $2L/3$).



Tercer harmònic de la corda: 4 nodes i 3 ventres. Les línies contínua i discontinua són les dues posicions extremes de la corda; N = node, V = ventre.

Longitud d'ona. Al dibuix hi cap una ona i mitja: $L = 1,5 \cdot \lambda$. De manera general, per a l'harmònic n d'una corda fixa pels dos extrems, $\lambda = 2L/n$. Amb $n = 3$: $\lambda = 2 \cdot 0,70/3 = 0,467 \text{ m}$.

Distància entre nodes consecutius. Entre dos nodes seguits hi ha mitja longitud d'ona (també es veu al dibuix que és un terç de la corda): distància $= \lambda/2 = L/3 = 0,70/3 = 0,233 \text{ m}$.

Com puntua la pauta

- 0,4 Dibuixar el tercer harmònic amb els 3 ventres i els 4 nodes (si falten els nodes dels extrems es resten 0,1 p).
- 0,3 Obtenir la longitud d'ona, $\lambda = 2L/3 = 0,467 \text{ m}$ (o bé de $L = 1,5\lambda$).
- 0,3 Calcular la distància entre nodes consecutius, $\lambda/2 = L/3 = 0,233 \text{ m}$.

b)

Freqüència. $f = v/\lambda = 308/0,467 = 660 \text{ Hz}$.

Període. $T = 1/f = 1/660 = 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$

Temps entre el punt més alt i el més baix. Un ventre oscil·la verticalment amb el període de l'ona. Passar de l'elongació màxima a la mínima és només mitja oscil·lació: $\Delta t = T/2 = 1,51 \cdot 10^{-3}/2 = 7,58 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$

Com puntua la pauta

0,4 Calcular la freqüència, $f = v/\lambda = 660 \text{ Hz.}$

0,3 Calcular el període, $T = 1/f = 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$

0,3 Raonar que de dalt a baix el ventre triga mig període: $\Delta t = T/2 = 7,58 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Un remer assegut a la seva barca, de comportament estacionari respecte a l'aigua, observa que les crestes de les ones passen per la proa cada 4,00 s, que l'amplitud de les crestes és de 0,30 m i que la distància entre dues crestes és de 9,00 m.

- a) Calculeu la velocitat de propagació de les ones. Determineu l'equació de l'ona suposant que la fase inicial és zero. [1 punt, segons la pauta]
- b) En un instant donat, calculeu la diferència de fase entre dos punts que disten 4,00 m l'un de l'altre. [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Velocitat de propagació. El temps entre dues crestes és el període, $T = 4,00$ s, i la distància entre crestes és la longitud d'ona, $\lambda = 9,00$ m: $v = \lambda/T = 9,00/4,00 = 2,25$ m/s.

Magnituds de l'equació. Escrivim l'ona com $y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$, amb $\varphi_0 = 0$. La pulsació és $\omega = 2\pi/T = 2\pi/4,00 = \pi/2$ rad/s i el nombre d'ona, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/9$ m⁻¹.

Equació amb valors. $y(x, t) = 0,30 \cdot \sin(\pi t/2 - 2\pi x/9)$, amb x i y en m i t en s.

Com puntua la pauta

0,2 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda/T = 2,25$ m/s.

0,4 Plantejar l'equació general amb $\varphi_0 = 0$ i calcular $\omega = \pi/2$ rad/s i $k = 2\pi/9$ m⁻¹.

0,4 Escriure l'equació amb els valors, $y = 0,30 \cdot \sin(\pi t/2 - 2\pi x/9)$.

b)

Resta de les fases. En un mateix instant t , la fase de dos punts x_1 i x_2 és $\Delta\varphi = (\pi t/2 - 2\pi x_2/9) - (\pi t/2 - 2\pi x_1/9)$: el terme del temps desapareix.

Valor. $\Delta\varphi = (2\pi/9) \cdot (x_1 - x_2)$, en valor absolut $(2\pi/9) \cdot 4,00 = 8\pi/9$ rad $\approx 2,79$ rad.

Com puntua la pauta

0,5 Escriure la diferència de fase com la resta de les fases dels dos punts en el mateix instant.

0,5 Obtenir $\Delta\varphi = (2\pi/9) \cdot 4 = 8\pi/9$ rad.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

En un estadi el públic fa l'onada per celebrar la bona actuació de l'equip local. L'onada és tan gran que dos espectadors de la mateixa fila separats com a mínim per 50 m es mouen igual i ho fan cada 10 s.

- a) Si modelitzéssim aquesta onada a l'estadi com una ona, de quin tipus d'ona estaríem parlant? Calculeu-ne la longitud d'ona i la pulsació (freqüència angular). [1 punt, segons la pauta]
- b) Un espectador es mou 1,0 m verticalment quan s'aixeca i s'asseu per fer passar l'onada. Escriviu l'equació del moviment d'aquest espectador considerant que descriu un moviment harmònic simple i que en l'instant inicial es troba assegut, és a dir, en la seva posició mínima. [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Tipus d'ona. Seria una ona **mecànica**, perquè necessita un medi material (el públic) per propagar-se, i **transversal**, perquè cada espectador es mou amunt i avall mentre l'onada avança al llarg de la fila. Si considerem la graderia com un pla, també es pot dir que és bidimensional.

Longitud d'ona. La longitud d'ona és la distància mínima entre dos punts que es mouen exactament igual: $\lambda = 50$ m.

Pulsació. Cada espectador repeteix el moviment cada 10 s, que és el període: $\omega = 2\pi/T = 2\pi/10 = 0,2\pi$ rad/s $\approx 0,63$ rad/s.

Com puntua la pauta

- 0,2 Dir que és una ona mecànica.
- 0,2 Dir que és una ona transversal.
- 0,2 Identificar la longitud d'ona, $\lambda = 50$ m.
- 0,4 Calcular la pulsació, $\omega = 2\pi/T = 0,2\pi \approx 0,63$ rad/s.

b)

Forma general. Per a un MHS vertical escrivim $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, on A és l'amplitud, ω la pulsació de l'apartat anterior i φ_0 la fase inicial.

Amplitud. L'espectador recorre 1,0 m entre la posició més baixa i la més alta, que són dues amplituds: $A = 1,0/2 = 0,5$ m.

Condicció inicial. A $t = 0$ és assegut, a la posició mínima: $y(0) = -A = -0,5$ m.

Fase inicial. $A \cdot \sin \varphi_0 = -A \rightarrow \sin \varphi_0 = -1 \rightarrow \varphi_0 = -\pi/2$ rad.

Equació del moviment. $y(t) = 0,5 \cdot \sin(0,2\pi t - \pi/2)$, amb y en m i t en s. Escrita amb cosinus, la fase inicial seria $\pm\pi$.

Com puntua la pauta

- 0,2 Escriure l'equació general del MHS, $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.
- 0,2 Obtenir l'amplitud, $A = 0,5$ m.
- 0,2 Traduir la condició inicial: $y(0) = -A$.

0,2 Deduir la fase inicial, $\varphi_0 = -\pi/2$ rad.

0,2 Escriure l'equació amb els valors, $y(t) = 0,5 \cdot \sin(0,2\pi t - \pi/2)$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

21. Un tub d'orgue amb aire i amb heli ★

PAU Setembre 2016 · Sèrie 1 · P3 · Opció A

Un tub d'un orgue de la basílica de la Sagrada Família està obert pels dos extrems i fa 1,0 m de longitud.

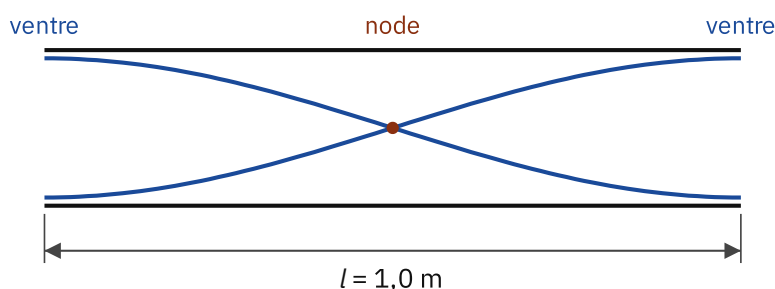
- a) Calculeu les freqüències i les longituds d'ona de les ones estacionàries que es poden propagar per aquest tub. [1 punt, segons la pauta]
- b) Si el tub estigués ple d'heli, el so s'hi propagaria a una velocitat de $975,0 \text{ m s}^{-1}$. En aquest cas, quines serien les freqüències? [1 punt, segons la pauta]

Dada: Velocitat del so en l'aire = $343,0 \text{ m s}^{-1}$.

▼ Solució

a)

Condició del tub obert. Als dos extrems oberts hi ha d'haver ventres. L'ona estacionària més senzilla (el fonamental) té un sol node, al mig del tub, i aleshores la longitud del tub és mitja longitud d'ona: $l = \lambda/2$.



Primer harmònic en un tub obert pels dos extrems: un ventre a cada extrem i un node al mig, de manera que la longitud del tub és mitja longitud d'ona.

Longitud d'ona fonamental. $\lambda_0 = 2l = 2 \cdot 1,0 = 2,0 \text{ m}$.

Freqüència fonamental. De $v_0 = \lambda_0 \cdot f_0$: $f_0 = v_0/\lambda_0 = 343,0/2,0 = 171,5 \text{ Hz}$.

Totes les freqüències. En un tub obert pels dos extrems són possibles tots els harmònics, múltiples enters del fonamental: $f_n = n \cdot f_0 = n \cdot 171,5 \text{ Hz}$, amb $n = 1, 2, 3, \dots$

Totes les longituds d'ona. Les longituds d'ona corresponents són $\lambda_n = 2l/n = 2,0/n \text{ m}$, amb $n = 1, 2, 3, \dots$

Com puntua la pauta

0,2 Relacionar la longitud del tub amb la longitud d'ona del fonamental, $l = \lambda/2$.

0,2 Obtenir $\lambda_0 = 2l = 2,0 \text{ m}$.

0,2 Calcular la freqüència fonamental, $f_0 = v_0/\lambda_0 = 171,5 \text{ Hz}$.

0,2 Donar les freqüències permeses, $f_n = n \cdot 171,5 \text{ Hz}$.

0,2 Donar les longituds d'ona permeses, $\lambda_n = 2,0/n \text{ m}$.

b)

Què canvia amb l'heli. Les longituds d'ona les fixa la geometria del tub, que no canvia; només canvia la velocitat del so. Per tant, $f'_n = n \cdot f'_0 = n \cdot v_{\text{He}} / \lambda_0$.

Freqüències amb heli. $f'_n = n \cdot 975,0 / 2,0 = n \cdot 487,5 \text{ Hz}$, amb $n = 1, 2, 3 \dots$

Com puntua la pauta

0,5 Escriure les freqüències permeses amb la nova velocitat, $f'_n = n \cdot v_{\text{He}} / \lambda_0$.

0,5 Obtenir $f'_n = n \cdot 487,5 \text{ Hz}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

El timbre que sona en una escola a l'hora del pati perquè els alumnes tornin a classe és molt fort. Per tal de saber fins on el sentiran, en cas de no haver-hi edificis ni cap mena de pèrdua d'energia, mesurem amb el telèfon intel·ligent (*smartphone*) el nivell d'intensitat sonora a 7,0 m de distància del timbre i obtenim un valor de 50 dB. Calculeu:

- a) La intensitat del so en el lloc on fem la mesura. [1 punt, segons la pauta]
- b) La potència del timbre. A partir de quina distància del timbre els alumnes deixaran de sentir el so? [1 punt, segons la pauta]

Dada: Les persones no poden percebre els sons que tenen una intensitat inferior a $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.
Suposeu que el timbre és un emissor de so puntual que emet en totes les direccions.

▼ Solució

a)

Nivell d'intensitat. El nivell en decibels es defineix a partir de la intensitat llindar: $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

Substitució. $50 = 10 \cdot \log(I/10^{-12})$, d'on $\log(I/10^{-12}) = 5$ i $I/10^{-12} = 10^5$.

Intensitat. $I = 10^5 \cdot 10^{-12} = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

Com puntua la pauta

- 0,3 Escriure la definició del nivell d'intensitat, $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0)$.
0,2 Substituir-hi $\beta = 50 \text{ dB}$ i $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.
0,2 Desfer el logaritme: $I/I_0 = 10^5$.
0,3 Obtenir $I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

b)

Potència del timbre. Una font puntual reparteix la potència per igual sobre esferes centrades en ella: $I = P/(4\pi r^2)$. A 7,0 m: $P = I \cdot 4\pi r^2 = 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 7,0^2 = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ W}$.

Distància a partir de la qual no se sent. El so deixa de sentir-se quan la intensitat baixa fins al llindar, $I = I_0$: $P/(4\pi r^2) = I_0 \rightarrow r = \sqrt{P/(4\pi I_0)} = \sqrt{(6,2 \cdot 10^{-5})/(4\pi \cdot 10^{-12})} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ m}$. Més enllà d'uns 2,2 km els alumnes ja no el sentrien.

Com puntua la pauta

- 0,3 Relacionar intensitat i potència per a una font puntual, $I = P/(4\pi r^2)$.
0,2 Calcular la potència, $P = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ W}$.
0,3 Plantejar que el so deixa de sentir-se quan $I = I_0$.
0,2 Obtenir la distància, $r = 2,2 \cdot 10^3 \text{ m}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

23. La primera corda de la guitarra i tres guitarres alhora ★

PAU Juny 2013 · Sèrie 3 · P5 · Opció A

Les sis cordes d'una guitarra vibren entre dos punts fixos (el pont i la celleta). Per a certes freqüències de vibració de la corda es generen ones estacionàries entre tots dos extrems. Si la guitarra està afinada, la vibració de la primera corda en el mode fonamental correspon a la nota mi, de 330 Hz.

- a) Determineu la longitud d'ona del mode fonamental, si la longitud de la corda són 65,0 cm, i calculeu també la velocitat de propagació de les ones que, per superposició, generen l'ona estacionària. [1 punt, segons la pauta]
- b) Si un espectador situat a 3,0 m de distància de la guitarra percep una sensació sonora de 30 dB, quina sensació sonora percebrà si sonen tres guitarres idèntiques tocant la mateixa nota? [1 punt, segons la pauta]

Dada: Intensitat llindar, $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$

▼ Solució

a)

Longitud d'ona del mode fonamental. Els dos extrems de la corda estan fixos i, per tant, hi ha un node a cadascun. En el mode fonamental (primer harmònic) entre aquests dos nodes només hi ha un ventre: la corda fa mitja longitud d'ona. Així, $L = \lambda_0/2$ i $\lambda_0 = 2L = 2 \cdot 0,650 = 1,30 \text{ m}$.

Velocitat de propagació. Les dues ones que viatgen en sentits oposats i formen l'ona estacionària tenen la longitud d'ona i la freqüència del mode: $v = \lambda_0 \cdot \nu_0 = 1,30 \cdot 330 = 429 \text{ m/s}$.

Com puntua la pauta

0,5 Veure que en el mode fonamental la longitud d'ona és el doble de la corda: $\lambda_0 = 2L = 1,30 \text{ m}$.

0,5 Calcular la velocitat de propagació amb $v = \lambda_0 \cdot \nu_0$: 429 m/s.

b)

Una guitarra. Si I_1 és la intensitat que arriba a l'espectador quan sona una sola guitarra, el nivell que percep és $\beta_1 = 10 \cdot \log(I_1/I_0) = 30 \text{ dB}$.

Tres guitarres. Les tres guitarres són iguals i són a la mateixa distància, i les intensitats de fonts independents se sumen: $I_3 = 3 \cdot I_1$.

Nova sensació sonora. $\beta_3 = 10 \cdot \log(I_3/I_0) = 10 \cdot \log(3 \cdot I_1/I_0) = 10 \cdot \log 3 + 10 \cdot \log(I_1/I_0) = 10 \cdot \log 3 + 30 = 4,8 + 30 = 35 \text{ dB}$ (34,8 dB). Triplicar la intensitat només afegeix uns 5 dB.

Com puntua la pauta

0,2 Escriure el nivell amb una guitarra, $\beta_1 = 10 \cdot \log(I_1/I_0) = 30 \text{ dB}$.

0,2 Veure que amb tres guitarres la intensitat es triplica: $I_3 = 3 \cdot I_1$.

0,6 Separar el logaritme, $\beta_3 = 10 \cdot \log 3 + \beta_1$, i obtenir 35 dB.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Observem que dues boies de senyalització en una zona de bany d'una platja, separades una distància de 2 m, oscil·len de la mateixa manera amb l'onatge de l'aigua del mar. Veiem que la mínima distància en què té lloc aquest fet és, justament, la separació entre les dues boies. Comptem que oscil·len trenta vegades en un minut i observem que pugen fins a una alçada de 20 cm.

- a) Determineu la freqüència, la longitud d'ona i la velocitat de les ones del mar.
[1 punt, segons la pauta]
- b) Escriviu l'equació que descriu el moviment de les boies en funció del temps, si comencem a comptar el temps quan les boies són en la posició més alta. Escriviu l'equació de la velocitat de les boies en funció del temps. [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Període. Les boies fan 30 oscil·lacions en un minut (60 s): $T = 60 \text{ s}/30 = 2 \text{ s}$.

Freqüència. $f = 1/T = 1/2 = 0,5 \text{ Hz}$.

Longitud d'ona. Les dues boies oscil·len igual, és a dir, en fase, i són els punts més pròxims que ho fan. Per tant, la seva separació és una longitud d'ona: $\lambda = 2 \text{ m}$.

Velocitat de les ones. $v = \lambda \cdot f = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ m/s}$.

Com puntua la pauta

0,3 Calcular el període a partir del recompte, $T = 2 \text{ s}$.

0,2 Obtenir $f = 1/T = 0,5 \text{ Hz}$.

0,2 Identificar la separació entre les boies amb la longitud d'ona, $\lambda = 2 \text{ m}$.

0,3 Calcular $v = \lambda \cdot f = 1 \text{ m/s}$.

b)

Forma general. Cada boia puja i baixa amb un MHS. Amb y mesurada des de la posició d'equilibri, $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Freqüència angular. $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ rad/s}$.

Fase inicial. A $t = 0$ les boies són a la posició més alta, $y = A$: $A = A \cdot \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \pi/2 \text{ rad}$.

Equació del moviment. L'amplitud és l'alçada que pugen respecte de l'equilibri, $A = 20 \text{ cm} = 0,20 \text{ m}$: $y = 0,20 \cdot \sin(\pi t + \pi/2)$, amb y en m i t en s. Amb cosinus s'escriu $y = 0,20 \cdot \cos(\pi t)$.

Velocitat. Derivem respecte del temps: $v = dy/dt = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, i amb valors $v = 0,20 \cdot \pi \cdot \cos(\pi t + \pi/2)$, amb v en m/s i t en s.

Com puntua la pauta

0,1 Escriure la forma general $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

0,1 Calcular $\omega = 2\pi f = \pi \text{ rad/s}$.

0,2 Imposar $y = A$ a $t = 0$ i obtenir $\varphi = \pi/2$.

0,3 Escriure l'equació del moviment amb valors i unitats.

0,3 Derivar per obtenir l'equació de la velocitat, amb unitats.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Un telèfon mòbil conté un motor vibrador que genera un moviment harmònic simple (al llarg de l'eix y) al xassís del dispositiu quan es reben trucades o notifikacions. Suposem que aquest moviment té una amplitud de 2,00 mm i una freqüència de 150 Hz.

- 3.1.** Escriu l'equació de moviment del telèfon si considerem que inicialment es troba a la posició d'equilibri $y = 0$ m. Quan es col·loca el telèfon damunt d'una superfície metàl·lica rígida, les vibracions es transmeten al material i generen ones mecàniques transversals que es propaguen a $3\,200\text{ m s}^{-1}$. Calculeu la longitud d'ona de l'ona mecànica que es propaga per la superfície i escriu l'equació de l'ona corresponent, suposant que la propagació es produeix en el sentit positiu de l'eix x , que inicialment es troba en la posició d'equilibri $y = 0$ m, i que l'amplitud de l'ona és de 2,00 mm. [1,25 punts]
- 3.2.** Suposant que el telèfon emet una potència acústica d'1,00 mW durant la vibració i que el so es propaga per l'aire de manera isotròpica (uniformement en totes direccions), calculeu el nivell d'intensitat sonora que percebrà una persona situada a 3,00 m del telèfon. [1,25 punts]

Dades: $I_0 = 10^{-12}\text{ W m}^{-2}$.

Nota: Assumiu que el front d'ona és esfèric.

▼ Solució

3.1.

Equació del MHS. Escrivim $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, amb $A = 2,00 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ i $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 150 = 300\pi\text{ rad/s}$ (942 rad/s). A $t = 0$ el telèfon és a l'equilibri: $0 = A \cdot \sin \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0$ (o π rad, perquè no se sap cap on es mou al principi). Per tant, $y(t) = 2,00 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(300\pi t)$, amb y en m i t en s. Amb cosinus seria $y(t) = 2,00 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(300\pi t - \pi/2)$.

Longitud d'ona. $\lambda = v/f = 3\,200/150 = \lambda = 21,3\text{ m}$.

Equació de l'ona. El nombre d'ona és $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/21,3 = k = 0,294\text{ m}^{-1}$. Per a una ona que avança en el sentit positiu de l'eix x , $y(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$. La condició $y(0, 0) = 0$ dona $\sin \varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0$ (o π rad). Així, $y(x, t) = 2,00 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(0,294x - 300\pi t)$, amb x i y en m i t en s (o, amb cosinus, $2,00 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(0,294x - 300\pi t - \pi/2)$). El signe relatiu entre kx i ωt ha de ser negatiu perquè l'ona avanci cap a les x positives.

Com puntua la pauta

0,5 Escriure l'equació del MHS amb $\omega = 300\pi\text{ rad/s}$ i deduir la fase inicial de $y(0) = 0$: $y(t) = 2,0 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(300\pi t)$ (o una forma equivalent). Es resten 0,25 si no s'analitza la condició inicial.

0,25 Calcular la longitud d'ona: $\lambda = v/f = 21,3\text{ m}$.

0,5 Calcular $k = 0,294\text{ m}^{-1}$ i escriure l'equació de l'ona, $y(x, t) = 2,0 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(0,294x - 300\pi t)$. Es resten 0,25 si la fase és $kx + \omega t$.

3.2.

Intensitat a 3,00 m. Amb front d'ona esfèric, la potència es reparteix sobre una esfera de radi r :
 $I = P/(4\pi r^2) = 1,00 \cdot 10^{-3} / (4\pi \cdot 3,00^2) = I = 8,84 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

Nivell d'intensitat sonora. $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0) = 10 \cdot \log(8,84 \cdot 10^{-6} / 10^{-12}) = \beta = 69,5 \text{ dB}$.

Com puntua la pauta

0,5 Calcular la intensitat amb $I = P/(4\pi r^2)$: $8,84 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

0,75 Calcular el nivell d'intensitat sonora: $\beta = 69,5 \text{ dB}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

La sirena d'una alarma d'un edifici emet una ona sonora de 0,136 m de longitud d'ona, que en l'aire es propaga a una velocitat d'uns 340 m/s. L'ona sonora arriba a un observador que està aturat en un semàfor, segons la direcció de l'eix x en sentit positiu i amb una amplitud A_0 .

- a) Escriviu l'equació de l'ona harmònica plana, $A(x, t)$, que arriba a l'observador. Suposeu que la fase inicial és zero. [1,25 punts]
- b) A continuació, el semàfor es posa verd, i l'observador es posa en moviment i s'acosta a l'alarma a una velocitat constant. En aquestes condicions, l'observador percep un canvi de la freqüència de l'ona. Quin canvi de la freqüència percep l'observador? Quin o quins dels arguments següents descriuen millor aquest fenomen?:
1. El canvi de la freqüència és degut al moviment de la font.
 2. L'aparent canvi de la freqüència és degut al moviment relatiu entre la font i l'observador.
 3. El canvi en la longitud d'ona de la font és degut al moviment de l'observador.
 4. L'aparent canvi de la longitud d'ona és degut al moviment de l'observador.
- Justifiqueu la tria i per què heu descartat la resta d'arguments, i indiqueu el fenomen en què us heu basat. [1,25 punts]

▼ Solució

a)

Nombre d'ona, freqüència i freqüència angular. A partir de $\lambda = 0,136$ m i $v = 340$ m/s: $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,136 = 46,2 \text{ m}^{-1}$; $f = 1/T = v/\lambda = 340/0,136 = 2\,500 \text{ Hz}$; $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2\,500 = 15\,710 \text{ rad/s}$.

Equació de l'ona. Una ona harmònica plana que avança en el sentit positiu de l'eix x , amb fase inicial nul·la, es pot escriure de diverses maneres equivalents: $A(x, t) = A_0 \cdot \sin(kx - \omega t) = A_0 \cdot \sin k(x - vt) = A_0 \cdot \sin 2\pi(x/\lambda - t/T) = A_0 \cdot \sin 2\pi f(x/v - t)$. Amb els valors calculats:

$A(x, t) = A_0 \cdot \sin(46,2x - 15\,710t)$, amb x en m i t en s.

Com puntua la pauta

0,5 Calcular el nombre d'ona ($46,2 \text{ m}^{-1}$), la freqüència ($2\,500 \text{ Hz}$) i la freqüència angular ($15\,710 \text{ rad/s}$).

0,75 Escriure l'equació de l'ona plana que avança cap a les x positives, $A(x, t) = A_0 \cdot \sin(46,2x - 15\,710t)$, o una forma equivalent.

b)

Què percep. En acostar-se a l'alarma, l'observador sent un so més agut: una freqüència més alta que l'emesa. És l'efecte Doppler.

Argument correcte. El que descriu millor el fenomen és el 2: el canvi de freqüència és aparent i es deu al moviment relatiu entre la font i l'observador.

Per què no l'1. La sirena està quieta i continua emetent la mateixa freqüència: el canvi només el percep l'observador, no el produeix la font.

Per què no el 3. La longitud d'ona que emet la font no canvia pel fet que l'observador es mogui.

Per què no el 4. La longitud d'ona del so a l'aire tampoc canvia: les crestes continuen igual d'espaiades. A més, el que importa és el moviment relatiu entre observador i font, no només el de l'observador.

Per què el 2. L'oïda distingeix els sons per la seva freqüència. Quan l'observador avança cap a la font, va a trobar les crestes i el temps entre dues crestes que li arriben s'escurça: percep una freqüència més gran. A més, l'argument parla de moviment relatiu, que és el que compta, sense suposar que la font o l'observador hagin d'estar en repòs.

Com puntua la pauta

- 0,25** Dir que percep un so més agut (més freqüència) i associar-ho a l'efecte Doppler.
- 0,2** Triar l'argument 2 com a correcte.
- 0,2** Descartar l'1: la freqüència emesa no canvia i la font està en repòs.
- 0,2** Descartar el 3: la longitud d'ona de la font no canvia.
- 0,2** Descartar el 4: la longitud d'ona no canvia i el que importa és el moviment relatiu.
- 0,2** Justificar per què el 2 és el millor: l'oïda percep la freqüència, que augmenta aparentment perquè les crestes arriben més seguides, i el moviment és relatiu.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

27. El volcà Cumbre Vieja com un tub sonor gegant ★★

PAU Setembre 2022 · Sèrie 3 · P3

El volcà Cumbre Vieja va entrar en erupció el 19 de setembre de 2021 a l'illa de La Palma. El so de l'erupció volcànica va ser mesurat per un equip de vulcanòlegs, que van detectar que estava format per diferents freqüències i que tenia un nivell d'intensitat sonora variant. Pel que fa al so que produeix en alguns moments de l'erupció, un volcà es pot modelitzar com si fos un instrument musical de vent gegant. D'una manera simplificada, podem considerar un volcà com un tub d'aire amb un extrem tancat i l'altre obert, on es produeixen ones estacionàries d'una manera semblant a una trompeta.

- a) En un moment determinat de l'erupció del Cumbre Vieja, es va detectar que la freqüència fonamental del so que emetia era de 5,40 Hz. Calculeu la longitud d'ona d'aquest so. Dibuixeu el perfil de l'ona estacionària corresponent i calculeu la longitud del tub, que correspon a la longitud del tram de la xemeneia ple d'aire. [1,25 punts]
- b) En un moment de l'erupció, es va detectar un nivell d'intensitat sonora de 72,0 dB a la localitat de Todoque, que és a 5,22 km del con del volcà. Calculeu el nivell d'intensitat sonora que se sentirà des de la costa de l'illa d'El Hierro, que és a 92,3 km del volcà Cumbre Vieja. (Suposeu que no hi ha obstacles en la propagació del so entre el volcà Cumbre Vieja i l'illa d'El Hierro.) [1,25 punts]

Dades: $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

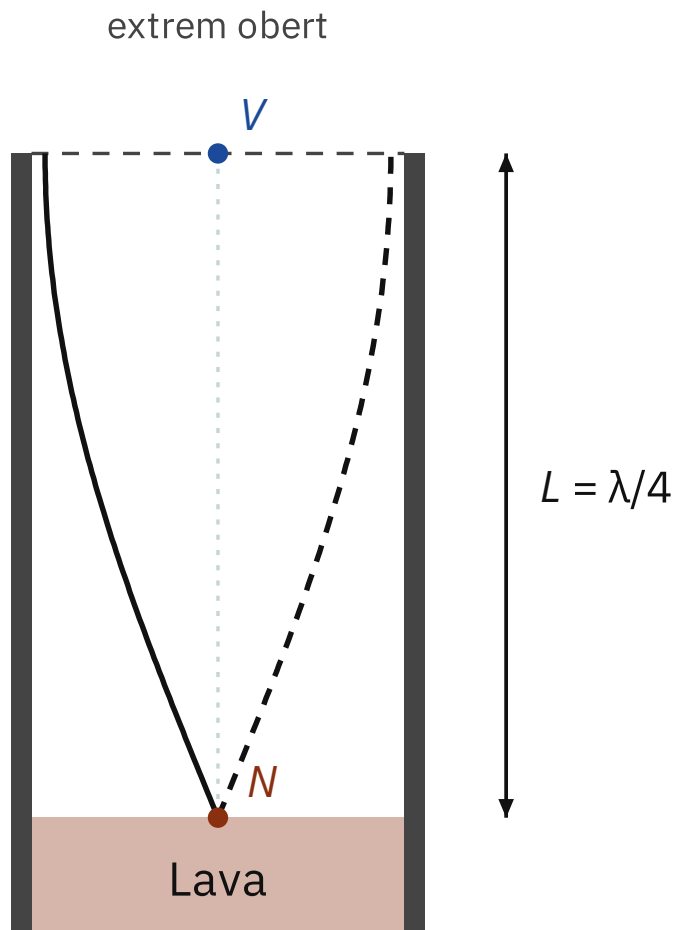
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. $v = \lambda/T = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = v/f = 340/5,40 = 63,0 \text{ m}$.

Perfil de l'ona estacionària. La lava fa de fons tancat: l'aire no s'hi pot moure i hi ha un node (N). L'extrem superior és obert, i hi ha un ventre (V). En el fonamental, entre el node i el ventre hi ha només un quart de longitud d'ona.



Harmònic fonamental a la xemeneia: node (N) a la lava, que fa de fons tancat, i ventre (V) a l'extrem obert.

Longitud del tub. $L = \lambda/4 = 63,0/4 = 15,7 \text{ m}$.

Com puntua la pauta

0,4 Calcular la longitud d'ona, $\lambda = v/f = 63,0 \text{ m}$.

0,4 Dibuixar el perfil correcte, amb el node a la superfície de la lava i el ventre a l'extrem obert.

0,45 Calcular la longitud del tub, $L = \lambda/4 = 15,7 \text{ m}$.

b)

Intensitat a Todoque. Amb $\beta_1 = 72,0 \text{ dB}$ i $r_1 = 5,22 \cdot 10^3 \text{ m}$: $\beta_1 = 10 \cdot \log(I_1/I_0) \rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^{\beta_1/10} = 10^{-12} \cdot 10^{7,2} = 1,58 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

Intensitat a El Hierro. La potència emesa és la mateixa i es reparteix en superfícies esfèriques cada cop més grans: $I = P/A \rightarrow I_1 \cdot A_1 = I_2 \cdot A_2 \rightarrow I_2 = I_1 \cdot A_1/A_2 = I_1 \cdot r_1^2/r_2^2 = 1,58 \cdot 10^{-5} \cdot (5,22 \cdot 10^3)^2 / (92,3 \cdot 10^3)^2 = 5,07 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$.

Nivell sonor a El Hierro. $\beta_2 = 10 \cdot \log(I_2/I_0) = 10 \cdot \log(5,07 \cdot 10^{-8}/10^{-12}) = 47,0 \text{ dB}$.

Com puntua la pauta

0,4 Obtenir la intensitat sonora a Todoque a partir del nivell, $I_1 = 1,58 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

0,6 Relacionar les intensitats amb el quadrat de les distàncies (mateixa potència) i obtenir $I_2 = 5,07 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$.

0,25 Calcular el nivell d'intensitat sonora a El Hierro, $\beta_2 = 47,0$ dB.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

28. Quatre nodes en una corda de 60 cm ★★

PAU Juny 2021 · Sèrie 5 · P3

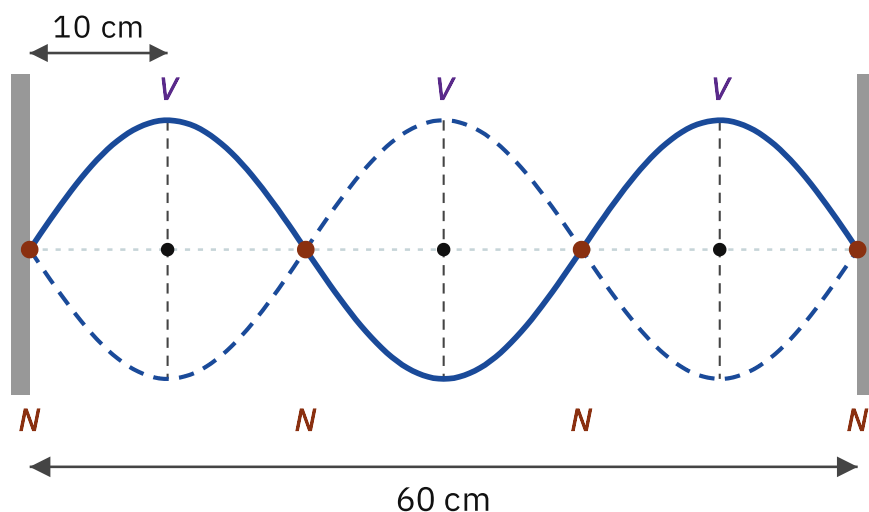
Una corda de 60 cm té els extrems fixats i oscil·la amb una freqüència de 200 Hz en un mode que té quatre nodes: dos nodes als extrems i dos nodes interns. El punt central de la corda oscil·la amb una amplitud de 2 cm. Calculeu:

- La velocitat de propagació de l'ona per la corda, la longitud de l'ona i la velocitat vertical màxima al centre de la corda. [1,25 punts]
- L'amplitud de l'oscil·lació d'un punt de la corda situat a 10 cm d'un dels extrems. L'amplitud de l'oscil·lació d'un punt de la corda situat a 20 cm d'un dels extrems. Justifiqueu les respostes. [1,25 punts]

▼ Solució

a)

Harmònic i longitud d'ona. Un mode amb quatre nodes (dos als extrems) té tres ventres: és el **tercer harmònic**. Dins la corda hi ha una ona i mitja, $L = 1,5 \cdot \lambda$, és a dir, $\lambda = 2L/3 = 2 \cdot 60/3 = 40$ cm = 0,4 m.



Mode amb quatre nodes (tercer harmònic) de la corda de 60 cm: nodes a 0, 20, 40 i 60 cm i ventres a 10, 30 i 50 cm. Les línies contínua i discontinua són les dues posicions extremes de la corda; N = node, V = ventre.

Velocitat de propagació. $v = \lambda \cdot f = 0,4 \cdot 200 = 80$ m/s.

Velocitat vertical màxima al centre. L'ona estacionària és $y(x, t) = A \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t$. Derivant respecte del temps, la velocitat vertical de cada punt és $v(x, t) = dy/dt = -A\omega \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t$. Al centre, l'amplitud d'oscil·lació és $A \cdot \sin kx = 2$ cm, de manera que $v_{\text{màx}} = A \cdot \sin kx \cdot 2\pi f = 0,02 \cdot 2\pi \cdot 200 = 25,1$ m/s. (És el mateix que dir que el centre fa un MHS d'amplitud 2 cm: $v_{\text{màx}} = A\omega$.)

Com puntua la pauta

0,5 Reconèixer el tercer harmònic (quatre nodes) i obtenir $\lambda = 2L/3 = 0,4$ m.

0,4 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda \cdot f = 80$ m/s.

0,35 Obtenir la velocitat vertical màxima al centre, $A \cdot \omega = 0,02 \cdot 2\pi \cdot 200 = 25,1 \text{ m/s}$ (derivant l'equació de l'ona estacionària o com a MHS d'amplitud 2 cm).

b)

Punt a 10 cm d'un extrem. L'extrem és un node i 10 cm és $\lambda/4$: com es veu a la figura de l'apartat a, en aquest punt hi ha un ventre. Tots els ventres oscil·len amb la mateixa amplitud que el centre (que també és un ventre), així que l'amplitud és **2,00 cm**.

Punt a 20 cm d'un extrem. A 20 cm de l'extrem estem a $\lambda/2$ d'un node, i dos nodes consecutius estan separats $\lambda/2$: aquest punt és un altre node i no oscil·la. L'amplitud hi és **0 cm**.

Com puntua la pauta

0,65 Justificar que a 10 cm hi ha un ventre i que l'amplitud és 2,00 cm.

0,6 Justificar que a 20 cm ($\lambda/2$ del node de l'extrem) hi ha un node i l'amplitud és 0.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

El camp elèctric d'un feix de llum emès per un làser quan passa a través d'un vidre el podem expressar amb l'equació $\vec{E}(x, t) = 28 \cos(2,4 \times 10^{15} t - 1,2 \times 10^7 x) \vec{k}$, tot en unitats del sistema internacional.

- a) Determineu la longitud d'ona i la velocitat de l'ona electromagnètica dins d'aquest vidre. Quant val l'índex de refracció d'aquest vidre? Quan la llum canvia de medi, la freqüència de l'ona electromagnètica no canvia. Quina és la longitud d'ona quan aquest feix de llum viatja pel buit? [1,25 punts]
- b) Quina és la direcció de propagació d'aquesta ona? En quin eix oscil·la el camp magnètic? Justifiqueu la resposta. [1,25 punts]

Dada: $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

▼ Solució

a)

Equació general d'una ona harmònica. Una ona harmònica que avança en el sentit positiu de l'eix x es pot escriure $\psi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx) = A \cdot \cos 2\pi(t/T - x/\lambda)$. Aquí k és el nombre d'ona, que no s'ha de confondre amb el vector unitari $\vec{k}$ que dona la direcció del camp.

Freqüència angular, nombre d'ona, període i freqüència. Comparant amb l'equació de l'enunciat: $\omega = 2,40 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ i $k = 1,20 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$. D'aquí, $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2,40 \cdot 10^{15} = 2,618 \cdot 10^{-15} \text{ s}$ i $f = 1/T = \omega/2\pi = 3,82 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Longitud d'ona dins del vidre. $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/1,20 \cdot 10^7 = 5,24 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Velocitat dins del vidre. $v = \lambda/T = \lambda \cdot f = 5,24 \cdot 10^{-7} \cdot 3,82 \cdot 10^{14} = 2,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Índex de refracció. $n = c/v = 3,00 \cdot 10^8 / 2,00 \cdot 10^8 = 1,5$.

Longitud d'ona al buit. La freqüència no varia en sortir del vidre, però al buit la llum es propaga a $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Per tant, $\lambda_{\text{buit}} = c/f = 3,00 \cdot 10^8 / 3,82 \cdot 10^{14} = 7,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Com puntua la pauta

- 0,25 Escriure l'equació general d'una ona harmònica, $\psi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$.
- 0,25 Identificar ω i k i obtenir-ne el període i la freqüència ($3,82 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$).
- 0,1 Calcular la longitud d'ona al vidre, $\lambda = 2\pi/k = 5,24 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.
- 0,1 Calcular la velocitat al vidre, $v = \lambda \cdot f = 2,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- 0,2 Calcular l'índex de refracció, $n = c/v = 1,5$.
- 0,15 Indicar que al buit la llum va a $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- 0,2 Calcular la longitud d'ona al buit amb la mateixa freqüència, $7,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

b)

Direcció de propagació. L'argument del cosinus només depèn del temps i de la coordenada x : l'ona es propaga al llarg de l'eix x (el signe – entre ωt i kx indica que avança cap a les x positives).

Direcció del camp magnètic. En una ona electromagnètica els camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ són perpendiculars entre si i, alhora, perpendiculars a la direcció de propagació. El camp elèctric té la direcció del vector unitari $\vec{k}$, és a dir, oscil·la en l'eix z, i l'ona avança en l'eix x. L'única direcció perpendicular a totes dues és la de l'eix y: el camp magnètic **oscil·la en l'eix y**.

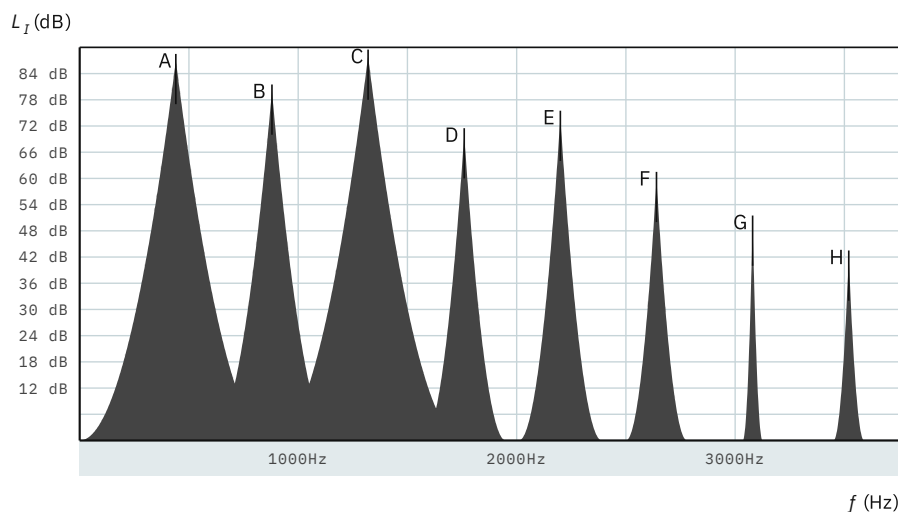
Com puntua la pauta

0,65 Justificar que l'ona es propaga en l'eix x perquè és la coordenada que apareix a l'argument.

0,6 Raonar que B és perpendicular a la propagació (x) i a E (eix z, vector k) i, per tant, oscil·la en l'eix y.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Hem recollit el so produït per un instrument musical i n'hem obtingut l'espectre representat en la figura. Els pics que hi apareixen corresponen als diferents harmònics del so produït i s'han etiquetat amb lletres de la A a la H. El pic B correspon a una freqüència de 880 Hz.



Espectre del so de l'instrument: nivell d'intensitat sonora en funció de la freqüència.

- a) Digueu si el so produït per l'instrument musical és un to pur o bé és un so complex i justifiqueu la resposta. Indiqueu quin és el pic que correspon a la freqüència fonamental i quina és aquesta freqüència. Indiqueu també a quina freqüència s'espera trobar el pic següent (pic I), que no ha cabut a la figura. [1 punt]
- b) El pic amb més nivell d'intensitat (pic C) arriba a 87 dB, mentre que el pic F arriba a 60 dB. Quantes vegades és més gran la intensitat sonora corresponent al pic C que la del pic F? [1 punt]

▼ Solució

a)

To pur o so complex. És un **so complex**: l'espectre té molts pics, és a dir, el so és la superposició de components de freqüències diferents. Un to pur tindria un sol pic.

Freqüència fonamental. Els pics estan igualment espaiats i el primer, el pic A, és el fonamental. El pic B és el segon harmònic, amb el doble de freqüència, de manera que $f_0 = 880/2 = 440$ Hz (pic A).

Pic I. Els harmònics tenen freqüències $f_n = n \cdot f_0 = n \cdot 440$ Hz. De A a H hi ha 8 pics, i el pic I seria el novè: $f_9 = 9 \cdot 440 = 3\ 960$ Hz.

Com puntua la pauta

- 0,3 Dir que és un so complex perquè l'espectre conté moltes freqüències.
- 0,4 Identificar el pic A com el fonamental i obtenir $880/2 = 440$ Hz.
- 0,3 Calcular la freqüència del pic I, $f_9 = 9 \cdot 440 = 3\ 960$ Hz.

b)

Definició del nivell. $L_I = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

Intensitat a partir del nivell. Aïllant la intensitat: $I = I_0 \cdot 10^{L_I/10}$.

Quocient. $I_C = I_0 \cdot 10^{8,7}$ i $I_F = I_0 \cdot 10^6$, de manera que $I_C/I_F = 10^{8,7}/10^6 = 10^{2,7} = 501 \approx 500$.

Conclusió. La intensitat del pic C és unes 500 vegades més gran que la del pic F, tot i que els nivells només es diferencien en 27 dB.

Com puntua la pauta

0,2 Escriure la definició del nivell d'intensitat sonora.

0,2 Aïllar la intensitat, $I = I_0 \cdot 10^{(L/10)}$.

0,4 Calcular el quocient $I_C/I_F = 10^{2,7} \approx 501$.

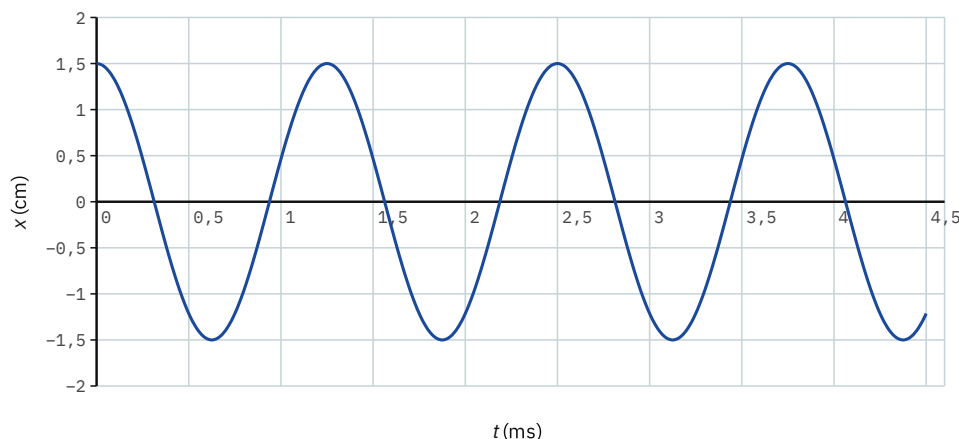
0,2 Concloure que el pic C és unes 500 vegades més intens que el pic F.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

31. Del gràfic d'un vibrador a l'equació de l'ona ★★

PAU Juny 2017 · Sèrie 1 · P3 · Opció A

Un sistema vibrador situat al punt $x = 0$ oscil·la tal com s'indica en aquest gràfic elongació-temps i transmet el moviment a una corda, de manera que es genera una ona transversal amb una longitud d'ona de 20,0 cm.



Elongació del vibrador situat a $x = 0$ en funció del temps.

- a) Determineu el període, l'amplitud i la freqüència de la vibració i la velocitat de propagació de l'ona per la corda. Escriviu l'equació de l'ona plana (no oblideu indicar totes les unitats de les magnituds que hi apareixen). [1 punt, segons la pauta]
- b) Demostreu, a partir de l'equació d'ona, que la velocitat màxima a la qual es mouen els punts de la corda en les seves oscil·lacions es pot calcular amb l'expressió $v_{\max} = A\omega$ (en què A és l'amplitud i ω és la pulsació). [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Lectura del gràfic. La corba torna a ser màxima a 1,25 ms, 2,5 ms i 3,75 ms, de manera que el període és $T = 1,25$ ms. L'elongació oscil·la entre -1,5 cm i +1,5 cm: l'amplitud és $A = 1,5$ cm.

Freqüència. $f = 1/T = 1/(1,25 \cdot 10^{-3}) = 800$ Hz.

Velocitat de propagació. $v = \lambda \cdot f = 0,200 \cdot 800 = 160$ m/s.

Forma de l'equació. L'elongació transversal dels punts de la corda (el gràfic l'anomena x ; a l'equació l'escriuim y perquè x és la posició al llarg de la corda) és $y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. A $x = 0$ i $t = 0$ l'elongació és màxima, +A; amb el cosinus això vol dir $\varphi_0 = 0$ (si s'escriu amb sinus, $\varphi_0 = \pi/2$ rad).

Pulsació i nombre d'ona. $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 800 = 1\,600\pi$ rad/s $\approx 5\,027$ rad/s; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,200 = 10\pi$ rad/m $\approx 31,4$ rad/m.

Equació amb valors. $y(x, t) = 1,5 \text{ cm} \cdot \cos(1\,600\pi \text{ rad/s} \cdot t - 10\pi \text{ rad/m} \cdot x)$, amb t en s i x en m.

Com puntua la pauta

- 0,1 Llegir el període al gràfic, $T = 1,25 \text{ ms}$.
- 0,1 Llegir l'amplitud, $A = 1,5 \text{ cm}$.
- 0,1 Calcular la freqüència, $f = 1/T = 800 \text{ Hz}$.
- 0,1 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda f = 160 \text{ m/s}$.
- 0,2 Escriure l'equació general de l'ona amb la fase inicial correcta ($\varphi_0 = 0$ amb cosinus).
- 0,1 Calcular la pulsació, $\omega = 1600\pi \text{ rad/s}$.
- 0,1 Calcular el nombre d'ona, $k = 10\pi \text{ rad/m}$.
- 0,2 Escriure l'equació amb els valors i les unitats.

b)

Velocitat d'un punt de la corda. Cada punt de la corda té una posició x fixa; la seva velocitat d'oscil·lació és la derivada de l'elongació respecte del temps: $v_y(x, t) = dy/dt = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$.

Valor màxim. A mesura que la fase $\omega t - kx + \varphi_0$ pren tots els valors, el sinus recorre tots els valors entre -1 i $+1$. Per tant, el mòdul de la velocitat és màxim quan el sinus val ± 1 : $v_{\max} = A\omega$.

Com puntua la pauta

- 0,4 Derivar l'equació de l'ona respecte del temps: $v_y = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$.
- 0,6 Raonar que el sinus varia entre -1 i $+1$, per tant, la velocitat màxima és $A\omega$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

32. La corda d'un violí: fonamental, tercer i cinquè modes ★★

PAU Juny 2014 · Sèrie 4 · P5 · Opció B

La corda d'un violí fa 32 cm de llargària i vibra amb una freqüència fonamental de 196 Hz.

- a) Expliqueu raonadament quina és la longitud d'ona del mode fonamental i digueu en quins punts de la corda hi ha els nodes i els ventres. Calculeu la velocitat de propagació de les ones que, per superposició, han generat l'ona estacionària de la corda. [1 punt, segons la pauta]
- b) Dibuixeu, de manera esquemàtica, el perfil de l'ona estacionària del tercer i del cinquè modes de vibració i calculeu-ne les freqüències. [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Harmònics d'una corda fixa. Els dos extrems de la corda no es poden moure, així que són nodes. Entre dos nodes consecutius hi ha mitja longitud d'ona, de manera que a la corda hi ha de cabre un nombre enter de mitges longituds d'ona: $n \cdot \lambda/2 = L$, amb $n = 1, 2, 3, \dots$

Longitud d'ona del mode fonamental. El mode fonamental és el de $n = 1$: $\lambda = 2L = 2 \cdot 32 = 64$ cm.

Nodes i ventres. En aquest mode hi ha un node a cada extrem de la corda i un ventre just al mig, a 16 cm de cada extrem.

Velocitat de propagació. $v_p = \lambda \cdot v = 0,64 \cdot 196 = 125$ m/s (125,4 m/s).

Com puntua la pauta

0,2 Escriure la condició dels harmònics d'una corda fixa, $n \cdot \lambda/2 = L$.

0,2 Obtenir per a $n = 1$ la longitud d'ona $\lambda = 2L = 64$ cm.

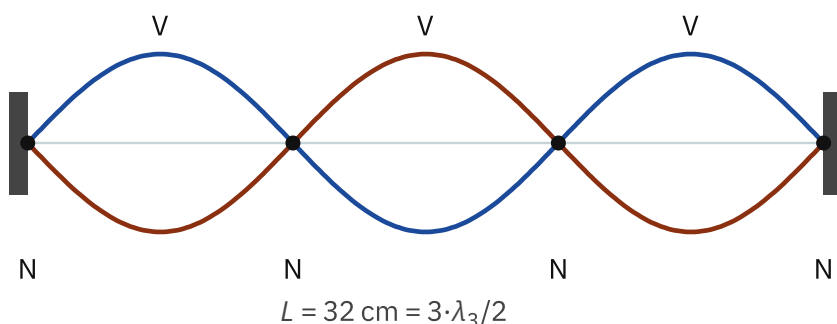
0,2 Situar els nodes als extrems i el ventre al centre de la corda.

0,2 Escriure $v_p = \lambda \cdot v$.

0,2 Obtenir $v_p = 125$ m/s.

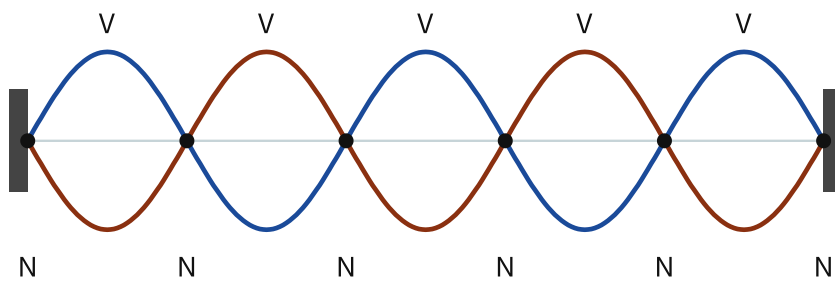
b)

Tercer mode. Amb $n = 3$ la corda fa tres fusos (figura). $\lambda_3 = 2L/3 = 2 \cdot 32/3 = 21,3$ cm i $v_3 = v_p/\lambda_3 = 125,4/0,213 = 588$ Hz, que és $3 \cdot 196$ Hz. (La pauta, amb $v_p = 125$ m/s, dona 587 Hz.)



Tercer mode de vibració: tres fusos, quatre nodes (N) i tres ventres (V).

Cinquè mode. Amb $n = 5$ la corda fa cinc fusos (figura). $\lambda_5 = 2L/5 = 2 \cdot 32/5 = 12,8$ cm i $v_5 = v_p/\lambda_5 = 125,4/0,128 = 980$ Hz, que és $5 \cdot 196$ Hz. (La pauta, amb $v_p = 125$ m/s, dona 977 Hz.)



$$L = 32 \text{ cm} = 5 \cdot \lambda_5 / 2$$

Cinquè mode de vibració: cinc fusos, sis nodes (N) i cinc ventres (V).

Com puntua la pauta

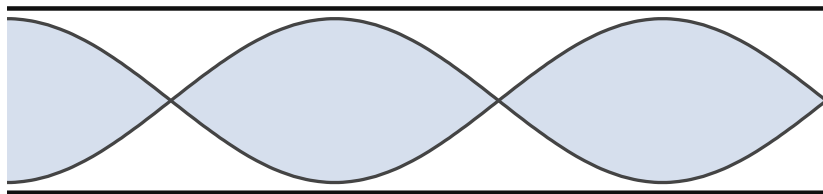
- 0,3 Dibuixar el perfil del tercer mode, amb tres fusos.
- 0,1 Obtenir $\lambda_3 = 2L/3 = 21,3 \text{ cm}$.
- 0,1 Calcular $v_3 = v_p/\lambda_3 \approx 587 \text{ Hz}$.
- 0,3 Dibuixar el perfil del cinquè mode, amb cinc fusos.
- 0,1 Obtenir $\lambda_5 = 2L/5 = 12,8 \text{ cm}$.
- 0,1 Calcular $v_5 = v_p/\lambda_5 \approx 977 \text{ Hz}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

33. El clarinet com un tub tancat per un extrem ★★

PAU Setembre 2013 · Sèrie 1 · P4 · Opció B

El clarinet és un instrument de fusta en forma de tub en el qual es generen ones estacionàries. L'instrument es pot assimilar a un tub ple d'aire obert per un extrem i tancat per l'altre. La figura mostra el mode tercer harmònic, on l'aire vibra amb una freqüència de 637 Hz.



El clarinet com un tub obert per un extrem (esquerra) i tancat per l'altre (dreta), vibrant en el mode tercer harmònic.

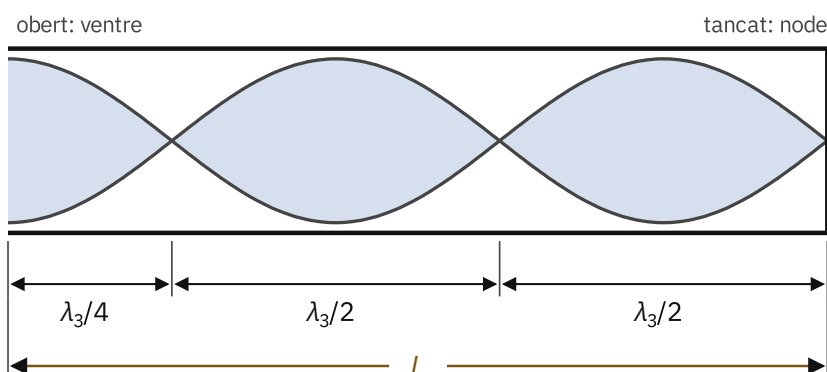
- a) Quina és la llargària del clarinet? [1 punt, segons la pauta]
- b) Si la nota es toca amb una intensitat d' $1,00 \times 10^{-5} \text{ W m}^{-2}$ i produeix una intensitat sonora determinada a dos metres de distància, en quants decibels augmenta el nivell de sensació sonora a la mateixa distància si la intensitat es duplica? [1 punt, segons la pauta]

Dada: $v_{so} = 340 \text{ m s}^{-1}$

▼ Solució

a)

Lectura de l'esquema. A l'extrem obert l'aire vibra amb amplitud màxima (ventre) i a l'extrem tancat no pot vibrar (node). A la figura, del ventre de l'extrem obert al primer node hi ha un quart de longitud d'ona, i després hi ha dos fusos sencers, de mitja longitud d'ona cadascun: $L = \lambda_3/4 + 2 \cdot \lambda_3/2 = 5\lambda_3/4$, és a dir, $\lambda_3 = 4L/5$. (És el tercer mode possible del tub: en un tub tancat per un extrem només hi ha els harmònics senars.)



Lectura de l'esquema: $\lambda_3/4$ des del ventre de l'extrem obert fins al primer node i dos fusos de $\lambda_3/2$ fins a l'extrem tancat.

Relació amb la freqüència. La velocitat del so lliga la longitud d'ona i la freqüència: $v_{so} = \lambda_3 \cdot \nu_3 = (4L/5) \cdot \nu_3$.

Llargària del clarinet. Aïllant L : $L = 5v_{so}/(4v_3) = 5 \cdot 340/(4 \cdot 637) = 0,667 \text{ m}$ ($6,67 \cdot 10^{-1} \text{ m}$).

Com puntua la pauta

0,4 Deduir de l'esquema que $L = 5\lambda_3/4$, és a dir, $\lambda_3 = 4L/5$.

0,2 Relacionar longitud d'ona i freqüència: $v_{so} = \lambda_3 \cdot v_3$.

0,4 Obtenir la llargària, $L = 5v_{so}/(4v_3) = 0,667 \text{ m}$.

b)

Nivell inicial. Si a dos metres arriba una intensitat I_1 , el nivell de sensació sonora és $\beta_1 = 10 \cdot \log(I_1/I_0)$ dB.

Nivell amb la intensitat doble. Ara la intensitat és $2I_1$: $\beta_2 = 10 \cdot \log(2I_1/I_0) = 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log(I_1/I_0) = 10 \cdot \log 2 + \beta_1$.

Augment. $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log 2 = 3,01 \text{ dB}$. L'augment no depèn del nivell de partida, i per això no calen ni la intensitat d' $1,00 \cdot 10^{-5} \text{ W m}^{-2}$ ni la distància.

Com puntua la pauta

0,4 Escriure el nivell inicial, $\beta_1 = 10 \cdot \log(I_1/I_0)$.

0,4 Escriure el nou nivell amb intensitat $2I_1$ i separar-lo com a $10 \cdot \log 2 + \beta_1$.

0,2 Concloure que el nivell augmenta 3,01 dB.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

34. Un emissor de 25,0 Hz en una corda ★★

PAU Juny 2012 · Sèrie 3 · P4 · Opció B

Una ona transversal avança per una corda. L'emissor que la produeix vibra amb una freqüència de 25,0 Hz. Considereu que l'ona avança en el sentit positiu de l'eix x . El centre emissor està situat a l'origen de coordenades, i l'elongació en l'instant inicial és nul·la. Sabem que la distància entre dos punts consecutius que estan en el mateix estat de vibració és 24,0 cm i que l'amplitud de l'ona és 3,00 cm. Calculeu:

- a) La velocitat de l'ona, la freqüència angular (pulsació), el nombre d'ona i l'equació de l'ona.
[1 punt, segons la pauta]
- b) La velocitat d'oscil·lació i l'acceleració d'un punt situat en $x = 6,00$ m en l'instant $t = 3,00$ s.
[1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Freqüència i longitud d'ona. La freqüència de l'ona és la de l'emissor, $\nu = 25,0$ Hz. Dos punts consecutius en el mateix estat de vibració estan separats una longitud d'ona: $\lambda = 24,0$ cm = 0,240 m.

Velocitat de l'ona. $v = \lambda \cdot \nu = 0,240 \cdot 25,0 = 6,00$ m/s.

Freqüència angular. $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 25,0 = 50\pi \approx 157$ rad/s.

Nombre d'ona. $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,240 \approx 26,2$ m⁻¹.

Forma general. Com que l'ona avança cap a les x positives, $y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi)$. Es pot fer amb sinus o amb cosinus, però el terme kx ha d'anar amb signe negatiu.

Fase inicial. A l'origen i a $t = 0$ l'elongació és nul·la: $y(0, 0) = A \cdot \sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$.

Equació de l'ona. Amb $A = 3,00$ cm = 0,03 m, i traient factor comú 50π (ja que $k/\omega = 1/\nu = 1/6$):
 $y(x, t) = 0,03 \cdot \sin[50\pi(t - x/6)]$, amb y i x en m i t en s. Amb cosinus, la fase inicial seria $\pm\pi/2$.

Com puntua la pauta

- 0,1 Identificar $\nu = 25$ Hz i $\lambda = 0,24$ m.
- 0,2 Calcular $v = \lambda \cdot \nu = 6,00$ m/s.
- 0,1 Calcular $\omega = 2\pi\nu = 157$ rad/s.
- 0,2 Calcular $k = 2\pi/\lambda = 26,2$ m⁻¹.
- 0,1 Escriure la forma general de l'ona amb $-kx$.
- 0,1 Imposar $y(0, 0) = 0$ i obtenir $\varphi = 0$.
- 0,2 Escriure l'equació de l'ona amb valors i unitats.

b)

Velocitat d'oscil·lació. Derivem l'elongació respecte del temps: $v(x, t) = dy/dt = 0,03 \cdot 50\pi \cdot \cos[50\pi(t - x/6)] = 1,5\pi \cdot \cos[50\pi(t - x/6)]$, en m/s.

Valor a $x = 6,00$ m i $t = 3,00$ s. L'argument val $50\pi(3 - 6/6) = 100\pi$, i $\cos(100\pi) = 1$: $v = 1,5\pi = 4,71$ m/s.

Acceleració. Tornem a derivar: $a(x, t) = dv/dt = -1,5\pi \cdot 50\pi \cdot \sin[50\pi(t - x/6)] = -75\pi^2 \cdot \sin[50\pi(t - x/6)]$, en m/s^2 .

Valor de l'acceleració. Amb el mateix argument, $\sin(100\pi) = 0$: $a = 0$. En aquest instant el punt passa per la posició d'equilibri, on la velocitat d'oscil·lació és màxima.

Com puntua la pauta

0,3 Derivar per obtenir l'expressió de la velocitat d'oscil·lació.

0,2 Avaluar-la: $1,5\pi = 4,71$ m/s.

0,3 Derivar la velocitat per obtenir l'expressió de l'acceleració.

0,2 Avaluar-la: $a = 0$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

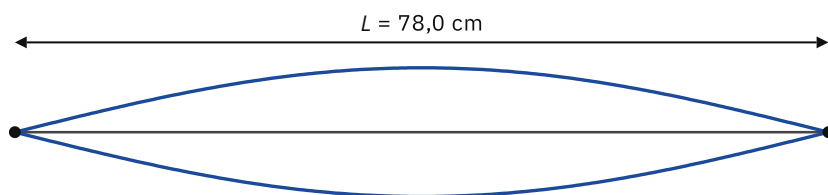
Les cordes d'una guitarra tenen una longitud de 78,0 cm. Sabem que una de les cordes, quan vibra en el seu harmònic fonamental, emet un la, que correspon a una freqüència de 220 Hz.

- a) Dibuixeu el perfil de l'ona quan la corda vibra en l'harmònic fonamental. Quina serà la longitud d'ona del so produït? Quina és la velocitat de propagació de les ones que, per superposició, han format l'ona estacionària de la corda? [1 punt, segons la pauta]
- b) Dibuixeu la corda quan vibra i emet un so corresponent al tercer harmònic. Indiqueu, en aquest cas, els nodes i els ventres de l'ona i calculeu-ne les posicions. [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Perfil del fonamental. La corda està fixa pels dos extrems, que són nodes. En l'harmònic fonamental hi ha un sol ventre, al mig: la corda vibra formant un únic fus de longitud L .



Harmònic fonamental: un sol fus, amb un node a cada extrem i un ventre al mig.

Longitud d'ona. La corda fa mitja longitud d'ona: $L = \lambda_1/2 \rightarrow \lambda_1 = 2L = 2 \cdot 78,0 = 156 \text{ cm}$. Seguint la pauta, aquesta és la longitud d'ona que es dona com a resposta (la de l'harmònic fonamental a la corda).

Velocitat de propagació. Les dues ones que, superposades, formen l'ona estacionària viatgen per la corda amb $v = \lambda_1 \cdot \nu_1 = 1,56 \cdot 220 = 343 \text{ m/s}$.

Com puntua la pauta

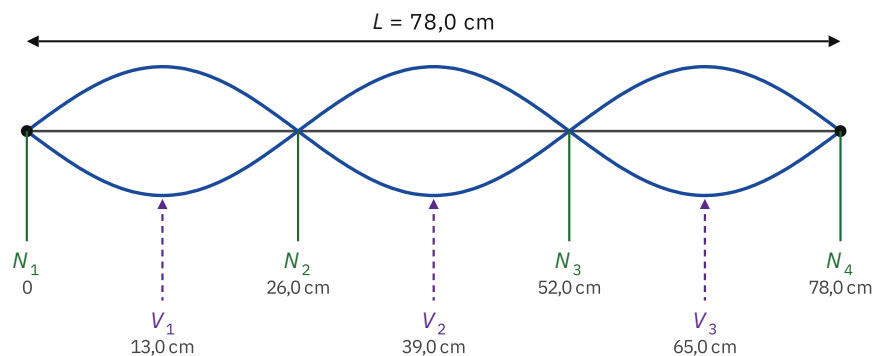
0,2 Dibuixar el perfil del fonamental: un fus amb nodes als extrems.

0,4 Relacionar $L = \lambda_1/2$ i obtenir $\lambda_1 = 156 \text{ cm}$.

0,4 Calcular $v = \lambda_1 \cdot \nu_1 = 343 \text{ m/s}$.

b)

Perfil del tercer harmònic. Ara la corda vibra en tres fusos: hi ha quatre nodes (N_1 a N_4 , comptant-hi els extrems) i tres ventres (V_1 a V_3).



Tercer harmònic: nodes N_1 – N_4 i ventres V_1 – V_3 , amb les posicions mesurades des de l'extrem esquerre.

Longitud d'ona. Hi caben tres mitges longituds d'ona: $L = 3 \cdot \lambda_3 / 2 \rightarrow \lambda_3 = 2L / 3 = 2 \cdot 78,0 / 3 = 52,0 \text{ cm}$.

Posicions dels nodes. Mesurant des de l'extrem esquerre, els nodes es repeteixen cada $\lambda_3 / 2 = 26,0 \text{ cm}$: $x(N_1) = 0$; $x(N_2) = 26,0 \text{ cm}$; $x(N_3) = 52,0 \text{ cm}$; $x(N_4) = 78,0 \text{ cm}$.

Posicions dels ventres. Cada ventre és a mig camí entre dos nodes consecutius: $x(V_1) = 13,0 \text{ cm}$; $x(V_2) = 39,0 \text{ cm}$; $x(V_3) = 65,0 \text{ cm}$.

Com puntua la pauta

- 0,3 Dibuixar el perfil del tercer harmònic (tres fusos); no cal etiquetar-hi N i V.
- 0,4 Calcular les posicions dels quatre nodes.
- 0,3 Calcular les posicions dels tres ventres.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Una ona harmònica transversal es propaga per una corda a una velocitat de 6,00 m/s. L'amplitud de l'ona és 20 mm i la distància mínima entre dos punts que estan en fase és 0,40 m. Considereu la direcció de la corda com l'eix x i que l'ona es propaga en el sentit positiu d'aquest eix.

- a) Calculeu la longitud d'ona, el nombre d'ona, la freqüència, el període i la freqüència angular (pulsació). [1 punt, segons la pauta]
- b) Escriviu l'equació de l'ona sabent que, en l'instant inicial, l'elongació d'un punt situat a l'origen de coordenades és màxima. Calculeu l'expressió de la velocitat amb què vibra un punt de la corda situat a una distància de 10 m respecte de l'origen de la vibració. Quina és la velocitat màxima d'aquest punt? [1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. Dos punts consecutius que vibren en fase estan separats exactament una longitud d'ona: $\lambda = 0,40 \text{ m}$.

Nombre d'ona. $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,40 = 5\pi = 15,7 \text{ m}^{-1}$.

Freqüència i període. De $v = \lambda \cdot f$ traiem $f = v/\lambda = 6,00/0,40 = 15 \text{ Hz}$. El període n'és l'invers: $T = 1/f = 1/15 = 0,067 \text{ s}$.

Freqüència angular. $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 15 = 30\pi \text{ rad/s} \approx 94 \text{ rad/s}$.

Com puntua la pauta

0,2 Identificar $\lambda = 0,40 \text{ m}$.

0,2 Calcular $k = 2\pi/\lambda = 15,7 \text{ m}^{-1}$.

0,2 Obtenir $f = v/\lambda = 15 \text{ Hz}$.

0,2 Obtenir $T = 1/f = 0,067 \text{ s}$.

0,2 Calcular $\omega = 2\pi f = 30\pi \approx 94 \text{ rad/s}$.

b)

Equació general i fase inicial. Per a una ona que avança cap a les x positives escrivim $y = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi)$. A l'origen i a $t = 0$ l'elongació és màxima: $y(0, 0) = A \cdot \cos \varphi = A \rightarrow \cos \varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$.

Equació amb valors. Amb $A = 20 \text{ mm} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$: $y = 2,0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(30\pi t - 5,0\pi x)$, amb y i x en m i t en s. També és vàlid escriure-la amb sinus, i aleshores la fase inicial és $\pi/2$.

Velocitat de vibració. Cada punt de la corda vibra transversalment, i la seva velocitat és la derivada temporal de l'elongació: $v = dy/dt = -A\omega \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi)$.

Punt situat a 10 m. Ara $A\omega = 2,0 \cdot 10^{-2} \cdot 30\pi = 0,60\pi \text{ m/s}$ i $kx = 5,0\pi \cdot 10 = 50\pi$. Per tant, $v(x = 10 \text{ m}) = -0,60\pi \cdot \sin(30\pi t - 50\pi)$, amb v en m/s i t en s.

Velocitat màxima. És màxima quan el sinus val ± 1 : $v_{\max} = A\omega = 2,0 \cdot 10^{-2} \cdot 30\pi = 0,6\pi = 1,9 \text{ m/s}$.

Com puntua la pauta

0,2 Imposar la condició inicial $y(0, 0) = A$ i obtenir $\varphi = 0$.

0,3 Escriure l'equació de l'ona amb els valors i les unitats.

0,1 Derivar l'elongació per obtenir l'expressió general de la velocitat de vibració.

0,2 Particularitzar la velocitat per a $x = 10$ m, amb unitats.

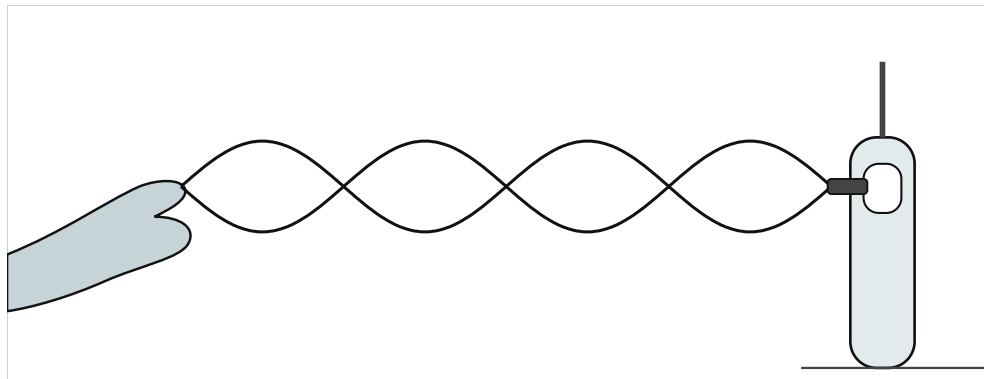
0,2 Calcular la velocitat màxima, $A\omega = 1,9$ m/s.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

37. Ones estacionàries amb un raspall de dents elèctric ★★

PAU Juny 2026 · Sèrie 5 · Exercici 3 · Opció A

Un raspall de dents elèctric es pot fer servir com un oscil·lador harmònic per a generar ones estacionàries en una corda. L'eix oscil·lador del raspall vibra amb una freqüència de 357 Hz. Si lliguem una corda elàstica a l'eix oscil·lador, engegum el raspall i anem deixant anar corda i jugant amb la tensió que fem amb la mà, anirem observant diferents harmònics.



Esquema propi de la fotografia de l'examen: la corda, subjectada amb la mà (esquerra) i lligada a l'eix del raspall (dreta), vibrant en un dels harmònics.

- 3.1.** Quin harmònic hi ha representat a la imatge de dalt? Per a l'harmònic representat, calculeu la longitud d'ona i la velocitat de propagació. Indiqueu en quina posició es troben els nodes i els ventres si la separació entre el primer i l'últim node és de 36,0 cm. [1,25 punts]
- 3.2.** L'eix del raspall de dents oscil·la lateralment amb un moviment harmònic simple. Tenint en compte que l'amplitud del moviment és de 0,50 mm i el moviment comença quan l'eix metàl·lic es troba en el punt de màxim desplaçament, escriviu l'equació de la posició de l'eix metàl·lic del raspall de dents. Representeu gràficament en la quadrícula de sota un període complet del moviment. [1,25 punts]



Quadrícula per representar el moviment.

▼ Solució

3.1.

Quin harmònic és. A la imatge es compten 5 nodes i 4 ventres (quatre fusos), així que és el **quart harmònic**.

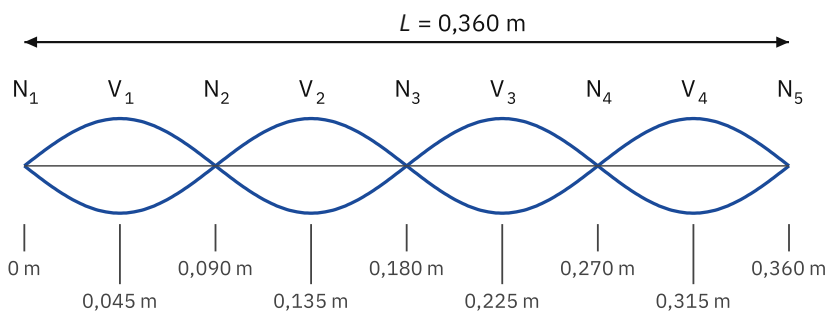
Longitud d'ona. Entre el primer i l'últim node hi ha quatre fusos, és a dir, dues longituds d'ona completes: $2\lambda = 0,360 \text{ m} \rightarrow \lambda = 0,180 \text{ m}$.

Velocitat de propagació. $v = \lambda \cdot f = 0,180 \cdot 357 = v = 64,3 \text{ m/s}$.

Nodes i ventres. Dos nodes consecutius estan separats $\lambda/2 = 0,090 \text{ m}$, i cada ventre és a mig camí entre dos nodes, $x_V = (2n - 1) \cdot \lambda/4$. Comptant des del primer node:

$x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 0,09 \text{ m}$; $x_{N3} = 0,18 \text{ m}$; $x_{N4} = 0,27 \text{ m}$; $x_{N5} = 0,36 \text{ m}$ i

$x_{V1} = 0,045 \text{ m}$; $x_{V2} = 0,135 \text{ m}$; $x_{V3} = 0,225 \text{ m}$; $x_{V4} = 0,315 \text{ m}$.



Quart harmònic: nodes (N) i ventres (V) comptats des del primer node.

Com puntua la pauta

0,25 Identificar el quart harmònic (5 nodes i 4 ventres).

0,25 Veure que hi ha dues longituds d'ona: $2\lambda = 0,36 \text{ m} \rightarrow \lambda = 0,18 \text{ m}$.

0,25 Calcular la velocitat: $v = \lambda \cdot f = 64,3 \text{ m/s}$.

0,5 Situar els cinc nodes (cada 0,09 m) i els quatre ventres (0,045, 0,135, 0,225 i 0,315 m).

3.2.

Amplitud i freqüència angular. $A = 0,50 \text{ mm} = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ i $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 357 = 714\pi = \omega = 2\,240 \text{ rad/s}$.

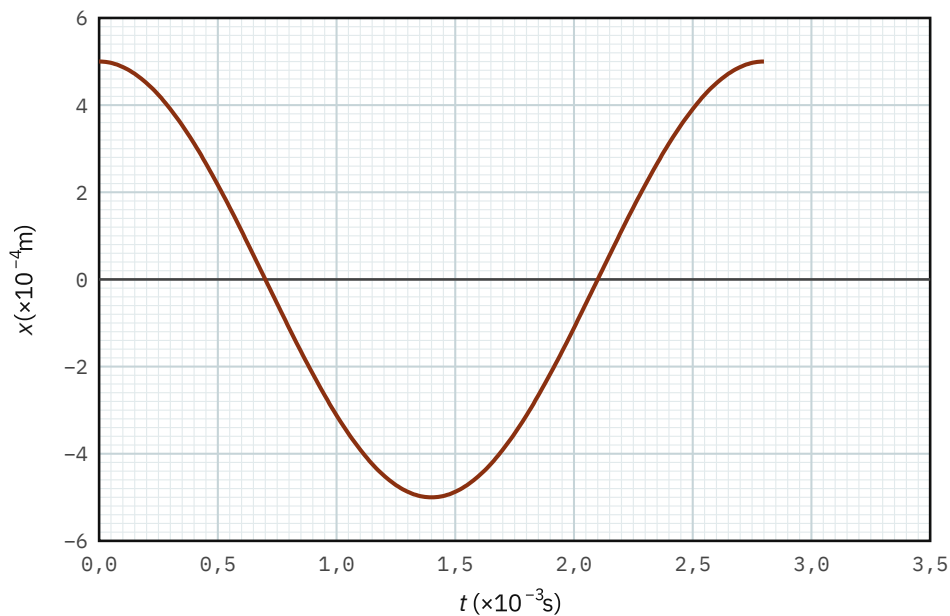
Equació general. Anomenem x la posició lateral de l'eix: $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Fase inicial i equació. El moviment comença a l'extrem: $x(0) = A \rightarrow \sin \varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

Així, $x(t) = 5,0 \cdot 10^{-4} \cdot \sin(2\,240t + \pi/2)$, amb x en m i t en s; amb cosinus, $x(t) = 5,0 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(2\,240t)$.

Període. $T = 1/f = 1/357 = T = 2,80 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Gràfica. A la quadrícula prenem $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ per divisió horitzontal (set divisions, fins a $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$) i $2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ per divisió vertical (de $-6 \cdot 10^{-4}$ a $6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$). La corba és una cosinusoide que comença al màxim ($5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$), passa per zero a $0,70 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, arriba al mínim a $1,40 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ i torna al màxim a $2,80 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.



Posició de l'eix del raspall durant un període, $x(t) = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(2240t)$ m (escala: $0,5 \cdot 10^{-3}$ s i $2 \cdot 10^{-4}$ m per divisió).

Com puntua la pauta

- 0,25** Calcular $\omega = 2\pi f = 2\,240$ rad/s i expressar $A = 5 \cdot 10^{-4}$ m.
- 0,25** Escriure l'equació general del MHS.
- 0,25** Imposar $x(0) = A$ per obtenir la fase inicial i escriure l'equació (sinus amb $\pi/2$ o cosinus amb fase 0).
- 0,2** Calcular el període, $T = 1/f = 2,80 \cdot 10^{-3}$ s.
- 0,3** Representar un període amb títols, unitats i una escala adequada.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), pàgina 7.

38. Els harmònics d'una flauta travessera ★★

PAU Juny 2025 · Sèrie 1 · Exercici 3 · Opció B

Una flauta travessera és un tub metàl·lic obert pels dos extrems que té una longitud de 67,0 cm. El seu so abraça un interval extens de freqüències i és un instrument molt comú en orquestres.

- Per a tocar la nota més greu, el flautista ha de tancar amb els dits tots els forats laterals del tub. Calculeu les freqüències del primer i el tercer harmònics d'una flauta travessera en aquest cas. Dibuixeu aquests dos harmònics i calculeu per a cada un la posició dels nodes i els ventres respecte d'un extrem de la flauta. [1,25 punts]
- Tapem un dels extrems de la flauta de manera que aquesta es comporta com un tub amb un extrem obert i un de tancat. Dibuixeu l'ona estacionària corresponent al primer i el segon modes de vibració possibles i indiqueu els seus nodes i ventres. Calculeu la longitud d'ona i la freqüència d'aquests dos modes de vibració. [1,25 punts]

Dada: Velocitat del so en l'aire = 343 m s^{-1} .

▼ Solució

a)

Primer harmònic. En un tub obert pels dos extrems hi ha ventres a tots dos extrems, i hi caben un nombre enter de mitges longituds d'ona: $\lambda_n = 2L/n$. Amb $v = \lambda \cdot f$: $f_n = n \cdot v / (2L) = n \cdot 343 / (2 \cdot 0,670) = n \cdot 256 \text{ Hz}$. Per tant, $f_1 = 256 \text{ Hz}$.

Tercer harmònic. $f_3 = 3 \cdot 256 = f_3 = 768 \text{ Hz}$.

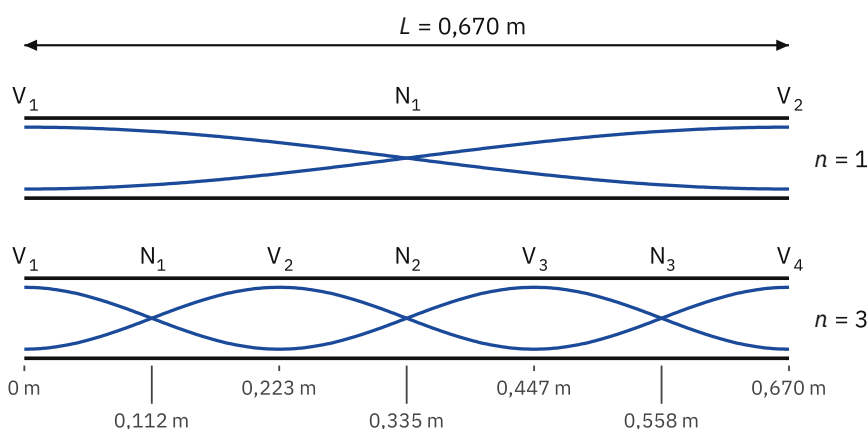
On són els nodes i els ventres. Els ventres estan separats mitja longitud d'ona a partir de l'extrem, $x_V = n \cdot \lambda / 2$, i els nodes queden just a mig camí entre dos ventres, $x_N = (2n + 1) \cdot \lambda / 4$ (amb $n = 0, 1, 2, \dots$).

Primer harmònic: posicions. $\lambda_1 / 2 = L = 0,670 \text{ m}$. Ventres: $x_{V1} = 0$ i $x_{V2} = 0,670 \text{ m}$; node: $x_{N1} = 0,335 \text{ m}$.

Tercer harmònic: posicions. $\lambda_3 / 2 = 0,670 / 3 = 0,223 \text{ m}$. Ventres:

$x_{V1} = 0$; $x_{V2} = 0,223 \text{ m}$; $x_{V3} = 0,447 \text{ m}$; $x_{V4} = 0,670 \text{ m}$. Nodes:

$x_{N1} = 0,112 \text{ m}$; $x_{N2} = 0,335 \text{ m}$; $x_{N3} = 0,558 \text{ m}$.



Primer i tercer harmònics de la flauta (tub obert pels dos extrems), amb els nodes (N) i els ventres (V).

Com puntua la pauta

0,25 Escriure la condició del tub obert ($\lambda_n = 2L/n$, $f_n = n \cdot v/2L$) i obtenir $f_1 = 256$ Hz.

0,25 Calcular el tercer harmònic: $f_3 = 768$ Hz.

0,25 Justificar que hi ha ventres als extrems, separats $\lambda/2$, i nodes a mig camí entre ventres.

0,25 Primer harmònic: ventres a 0 i 0,67 m i node a 0,335 m.

0,25 Tercer harmònic: ventres a 0, 0,223, 0,447 i 0,67 m i nodes a 0,112, 0,335 i 0,558 m (amb el dibuix).

b)

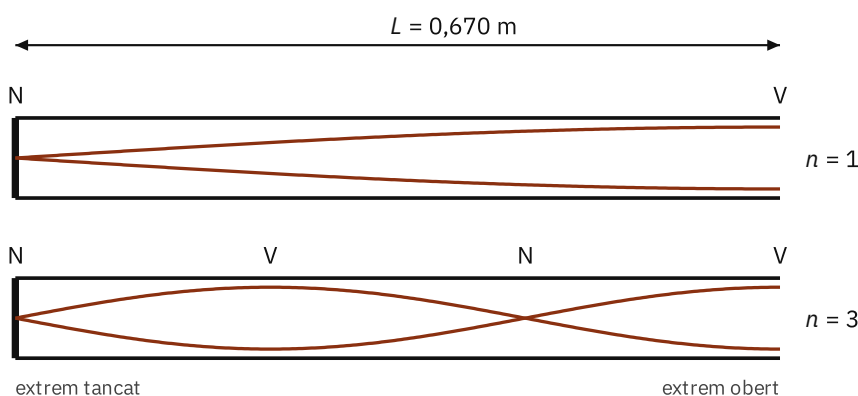
Primer mode (tub tancat per un extrem). Amb un extrem tancat hi ha un node a l'extrem tancat i un ventre a l'obert, de manera que la longitud del tub ha de ser un nombre senar de quarts de longitud d'ona: $\lambda_n = 4L/n$ i $f_n = v/\lambda_n = n \cdot v/(4L)$, amb $n = 1, 3, 5 \dots$ El primer mode és $n = 1$:

$$\lambda_1 = 4 \cdot 0,670 = 2,68 \text{ m i } f_1 = 343/2,68 = 128 \text{ Hz.}$$

Segon mode. El següent mode possible és $n = 3$: $\lambda_3 = 4 \cdot 0,670/3 = 0,893 \text{ m i}$

$$f_3 = 343/0,893 = 384 \text{ Hz.}$$

Dibuix. En el primer mode hi ha un sol node (a l'extrem tancat) i un sol ventre (a l'obert); en el segon, el tub conté tres quarts de longitud d'ona: node, ventre, node i ventre.



Primer i segon modes de vibració amb un extrem tancat: sempre hi ha un node a l'extrem tancat i un ventre a l'obert.

Com puntua la pauta

0,4 Escriure la condició del tub tancat per un extrem ($\lambda_n = 4L/n$, n senar) i calcular el primer mode: 2,68 m i 128 Hz.

0,35 Calcular el segon mode ($n = 3$): 0,893 m i 384 Hz.

0,25 Dibuixar el primer mode de vibració (fonamental).

0,25 Dibuixar el segon mode de vibració.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

L'Ainhoa està intrigada per saber a quina altura exploten els coets llançats a la revetlla de Sant Joan. Per a poder-ho determinar se situa a una distància de 50 metres del punt on es llancen els coets i enregistra, amb un sonòmetre, un nivell d'intensitat sonora de 100 decibels en l'explosió d'un coet que no s'ha enlairat.

- a) Quina potència sonora emet el coet en el moment de l'explosió? Si l'explosió ha durat 0,03 s, quina energia sonora s'ha alliberat? [1,25 punts]
- b) Des de la mateixa distància al punt de llançament, enregistra 90 decibels d'intensitat sonora en el cas d'un coet igual a l'anterior que s'ha enlairat verticalment i ha explotat a certa altura. Calculeu a quina altura ha explotat el coet. Si dos coets idèntics a l'anterior exploten simultàniament a la mateixa altura que abans, quin nivell d'intensitat sonora percebrà l'Ainhoa, si està situada a la mateixa posició d'abans? [1,25 punts]

Nota: Considereu que les ones sonores es propaguen en les tres dimensions de l'espai i la seva energia es distribueix en superfícies esfèriques.

Dades: $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.

Superfície esfèrica: $4\pi r^2$.

▼ Solució

a)

Intensitat a 50 m. $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0) \rightarrow 100 = 10 \cdot \log(I/10^{-12}) \rightarrow I = 10^{10} \cdot 10^{-12} = 10^{-2} \text{ W/m}^2$.

Potència. El so es reparteix sobre una esfera de radi $r = 50 \text{ m}$: $P = I \cdot 4\pi r^2 = 10^{-2} \cdot 4\pi \cdot 50^2 = 314,16 \text{ W}$.

Energia alliberada. $E = P \cdot t = 314,16 \cdot 0,03 = 9,42 \text{ J}$.

Com puntua la pauta

0,5 Obtenir la intensitat a partir del nivell sonor, $I = 10^{-2} \text{ W/m}^2$.

0,5 Calcular la potència repartida en una superfície esfèrica, $P = I \cdot 4\pi r^2 = 314,16 \text{ W}$.

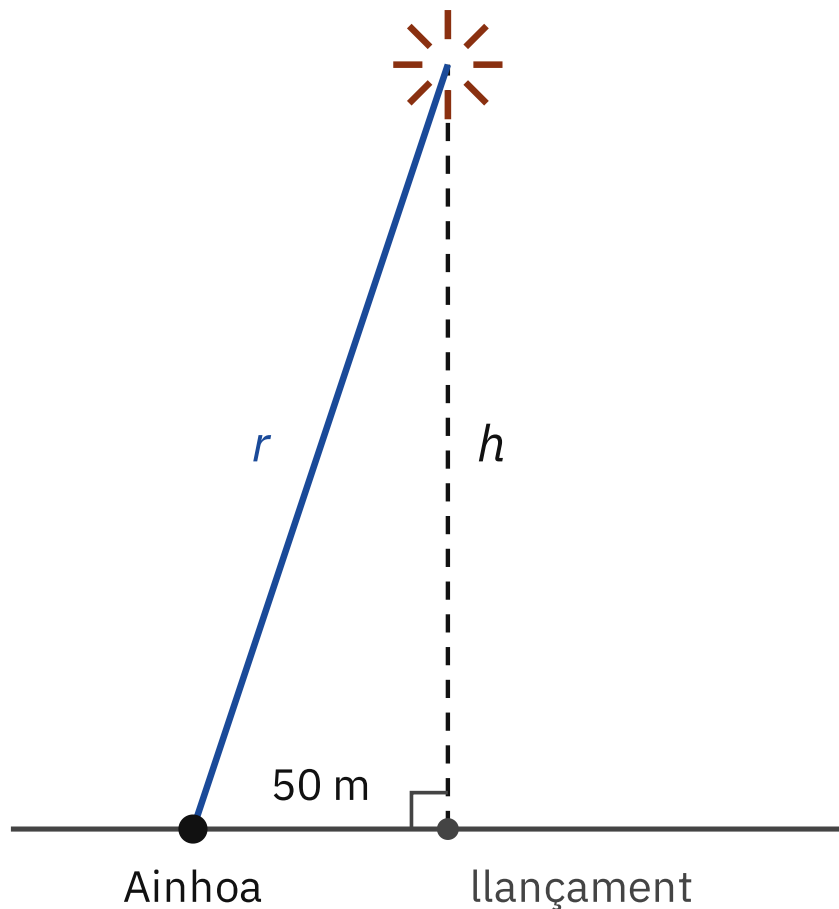
0,25 Calcular l'energia sonora, $E = P \cdot t = 9,42 \text{ J}$.

b)

Intensitat amb 90 dB. $90 = 10 \cdot \log(I/10^{-12}) \rightarrow I = 10^9 \cdot 10^{-12} = 10^{-3} \text{ W/m}^2$.

Distància fins a l'explosió. El coet és igual i emet la mateixa potència, que es reparteix en esferes: $P = I \cdot 4\pi r^2 \rightarrow r^2 = P/(4\pi I) = 314,16/(4\pi \cdot 10^{-3}) = 25000 \text{ m}^2 \rightarrow r = 158,11 \text{ m}$.

Altura. La distància r és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets 50 m (a terra) i h (vertical). Per Pitàgores: $h = \sqrt{(158,11^2 - 50^2)} = 150 \text{ m}$. Una altra manera: com que la potència és la mateixa, $I_2/I_1 = r_1^2/r_2^2 \rightarrow 10^{-3}/10^{-2} = 0,1 = 50^2/(h^2 + 50^2) \rightarrow h^2 = 9 \cdot 50^2 \rightarrow h = 3 \cdot 50 = 150 \text{ m}$.



Esquema a escala de la posició de l'Ainhoa i del punt on explota el coet.

Dos coets alhora. Dos coets iguals a la mateixa altura emeten el doble de potència, i a la posició de l'Ainhoa la intensitat es duplica: $\beta = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^{-3} / 10^{-12}) = 93 \text{ dB}$.

Com puntua la pauta

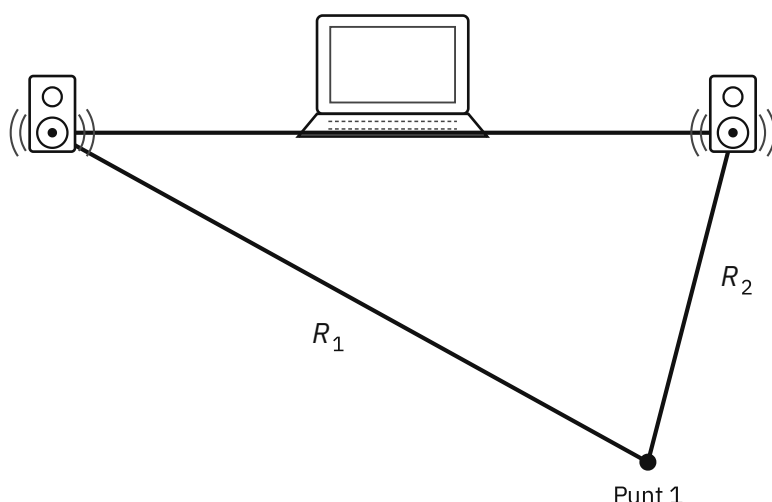
- 0,25 Obtenir la intensitat que correspon a 90 dB, 10^{-3} W/m^2 .
- 0,25 Calcular la distància a l'explosió amb la mateixa potència: $r = 158,11 \text{ m}$.
- 0,25 Aplicar Pitàgores per obtenir l'altura, $h = 150 \text{ m}$. (Alternativament, la relació entre intensitats i distàncies dona $h = 150 \text{ m}$: 0,5 punts per als dos passos.)
- 0,5 Duplicar la intensitat per als dos coets i calcular el nivell sonor, 93 dB.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

40. Dos altaveus connectats a un ordinador: on se sent i on no ★★

PAU Juny 2024 · Sèrie 5 · P3

Quan dos o més senyals acústics coherents coincideixen en l'espai, les ones es combinen i l'ona resultant és la suma algebraica de les ones individuals. Aquest fenomen es coneix com a *interferència*. En una experiència d'interferències disposem de dos altaveus connectats a un ordinador i separats entre ells 6,00 m i equidistants de l'ordinador. Ambdós altaveus emeten la mateixa ona harmònica amb una freqüència de 170 Hz i amb la mateixa fase inicial.



Els dos altaveus, l'ordinador i el punt 1, on es troben les rectes R_1 i R_2 (dibuixat a escala).

- a) Determineu la longitud d'ona emesa pels altaveus. El punt 1 es troba a una distància de 6,00 m d'un altaveu (recta R_1) i a 3,00 m de l'altre altaveu (recta R_2). Representeu esquemàticament i en gràfiques separades l'amplitud de l'ona en funció de la posició sobre la recta R_1 i sobre la recta R_2 , i determineu quin tipus d'interferència té lloc al punt 1. Justifiqueu la resposta. [1,25 punts]
- b) Determineu com variarà el so pel que fa a la freqüència i la intensitat en les situacions següents:
- si un dels altaveus deixa de funcionar.
 - si l'altaveu de l'esquerra es desplaça 1,00 m al llarg de la recta R_1 de manera que el punt 1 queda situat a 5,00 m d'aquest altaveu i es manté a 3,00 m de l'altaveu de la dreta.
 - si canviem el punt on mesurem la intensitat sonora, i ara el nou punt està a 3,00 m de l'ordinador i equidistant dels dos altaveus.
- Justifiqueu les respostes. [1,25 punts]

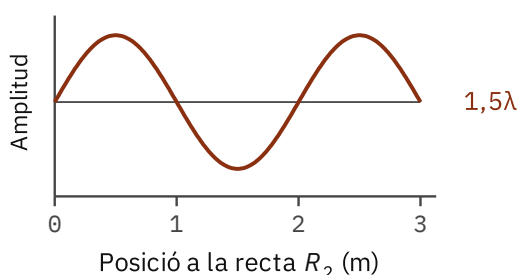
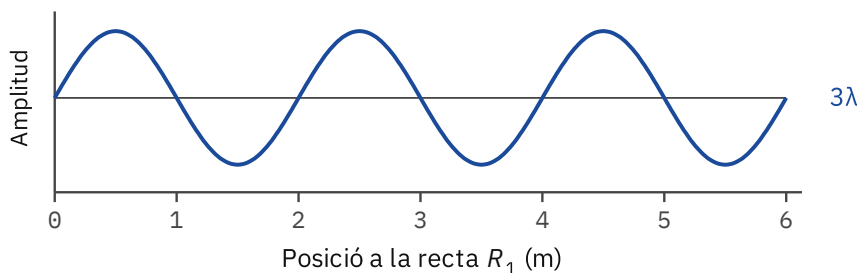
Dada: La velocitat del so en l'aire és de 340 m s^{-1} .

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. Totes dues ones tenen la mateixa freqüència i viatgen per l'aire a la mateixa velocitat: $\lambda = v/f = 340/170 = \lambda = 2,00 \text{ m}$.

Ones sobre cada recta. Comptem quantes longituds d'ona caben en cada recorregut: sobre R_1 , $6,00/2,00 = 3$ **longituds d'ona**; sobre R_2 , $3,00/2,00 = 1,5$ **longituds d'ona**. Com que els altaveus emeten en fase, les dues gràfiques comencen igual (amplitud nul·la que creix). L'ona de R_1 arriba al punt 1 després de tres oscil·lacions completes, i la de R_2 després d'una oscil·lació i mitja, de manera que hi arriben en estats de vibració oposats.



Amplitud de cada ona en funció de la posició sobre la recta R_1 (3λ) i sobre la recta R_2 ($1,5\lambda$).

Tipus d'interferència al punt 1. La diferència de camins és $\Delta r = 6,00 - 3,00 = 3,00 \text{ m} = 1,5\lambda$, és a dir, un nombre semienter de longituds d'ona. Les dues ones arriben al punt 1 en oposició de fase: hi ha **interferència destructiva**, i si les amplituds són iguals no s'hi sent res.

Com puntua la pauta

0,25 Calcular la longitud d'ona, $\lambda = v/f = 2 \text{ m}$.

0,5 Fer les dues representacions de manera que es vegin 3 longituds d'ona sobre R_1 i 1,5 sobre R_2 .

0,5 Justificar que la diferència de camins és $1,5\lambda$, que les ones arriben en oposició de fase i que la interferència és destructiva (no se sent res si les amplituds són iguals).

b)

Un altaveu deixa de funcionar. Al punt 1 només arriba una ona i ja no hi ha interferència: es passa de no sentir res a sentir el so d'un sol altaveu. La freqüència continua sent **170 Hz** i l'amplitud és la d'un sol altaveu, de manera que la intensitat ja no és nul·la.

L'altaveu de l'esquerra s'acosta 1,00 m. Ara el recorregut per R_1 és $5,00 \text{ m} = 2,5\lambda$ (s'ha escurçat $1,00 \text{ m} = \lambda/2$) i el de R_2 continua sent $1,5\lambda$. La diferència de camins és $2,5\lambda - 1,5\lambda = \lambda$, un nombre enter de longituds d'ona: les ones arriben en fase i hi ha **interferència constructiva**. La freqüència és 170 Hz i l'amplitud és la suma de les amplituds de cada altaveu (intensitat màxima).

Punt equidistant dels dos altaveus. Si el nou punt és a la mateixa distància dels dos altaveus, les dues ones fan el mateix recorregut (diferència de camins nul·la) i arriben en fase: també hi ha

interferència constructiva. La freqüència continua sent 170 Hz i l'amplitud és la suma de les dues amplituds.

Com puntua la pauta

- 0,4** Un altaveu apagat: sense interferència se sent el so d'un altaveu, amb freqüència 170 Hz i l'amplitud d'un sol altaveu.
- 0,4** Altaveu desplaçat: recorreguts de $2,5\lambda$ i $1,5\lambda$, diferència λ , ones en fase i interferència constructiva; 170 Hz i amplitud suma de les dues.
- 0,45** Punt equidistant: mateix recorregut, ones en fase i interferència constructiva; 170 Hz i amplitud suma de les dues.

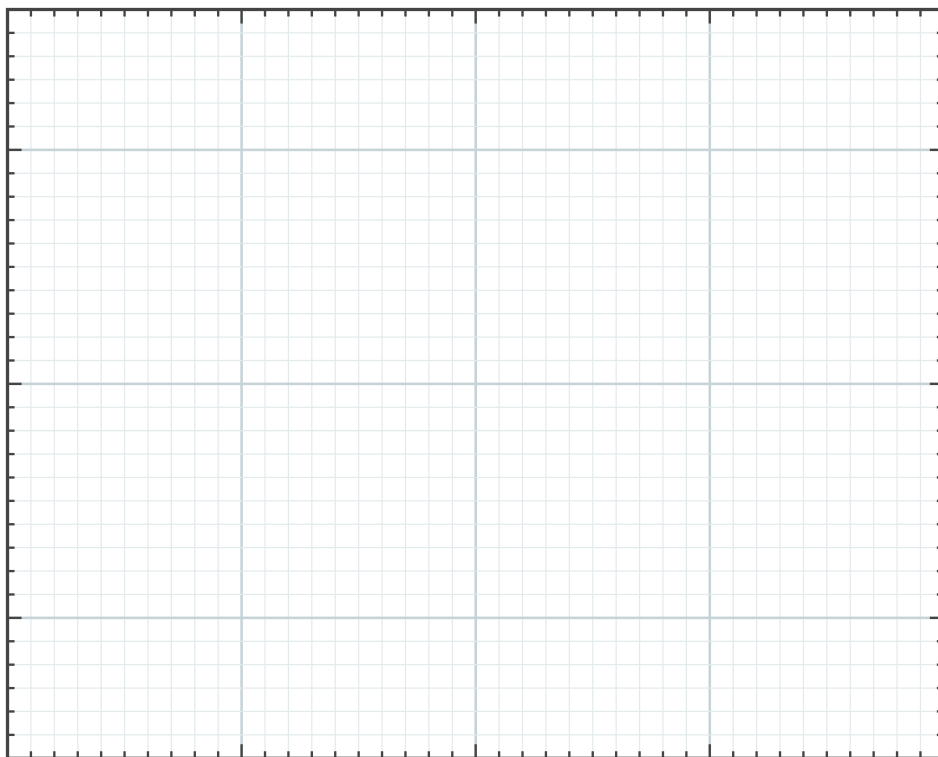
Pauta oficial: [PDF de correcció](#), pàgina 6.

41. Onades a la platja i la velocitat d'una boia ★★

PAU Juny 2023 · Sèrie 1 · P3

Des de la platja, observem que la distància entre les crestes de dues onades consecutives és de 4 m. Per altra banda, tot observant una de les boies que limita la zona de bany, comptem que oscil·la 30 vegades en un minut i que el seu desplaçament vertical total, des de la posició més baixa fins al punt més alt, és de 40 cm.

- a) Determineu la freqüència, la longitud d'ona i la velocitat de propagació de les ones. Escriviu l'equació que descriu el moviment de la boia en funció del temps. [1,25 punts]
- b) Deduïu l'expressió de la velocitat i l'acceleració de la boia i calculeu els valors màxims de la velocitat i l'acceleració. Representeu a la quadrícula de sota l'evolució de la velocitat respecte al temps durant un període. [1,25 punts]



Quadrícula per representar la velocitat de la boia.

Nota: Per determinar la fase inicial considereu que al principi la boia es troba en la posició més alta.

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. Dues crestes consecutives estan separades una longitud d'ona: $\lambda = 4 \text{ m}$.

Freqüència. La boia fa 30 oscil·lacions cada 60 s: $f = 30 \text{ cicles}/60 \text{ s} = 0,50 \text{ Hz}$.

Velocitat de propagació. $v = \lambda \cdot f = 4 \cdot 0,50 = 2,00 \text{ m/s}$.

Moviment de la boia. La boia puja i baixa amb un MHS: $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Amplitud. Del punt més baix al més alt hi ha dues amplituds: $2A = 0,40 \text{ m} \rightarrow A = 0,20 \text{ m}$.

Freqüència angular. $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,50 = \pi \text{ rad/s}$.

Fase inicial. A $t = 0$ la boia és a la posició més alta: $A = A \cdot \sin \varphi_0 \rightarrow \sin \varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

Equació del moviment. $y(t) = 0,2 \cdot \sin(\pi t + \pi/2)$, amb t en s i y en m. Amb el cosinus, $y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, la fase inicial seria $\varphi_0 = 0$ rad.

Com puntua la pauta

0,1 Identificar la longitud d'ona, $\lambda = 4$ m.

0,1 Calcular la freqüència, $f = 0,50$ Hz.

0,2 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda \cdot f = 2,00$ m/s.

0,2 Escriure l'equació general del MHS de la boia.

0,1 Obtenir l'amplitud, $A = 0,20$ m.

0,1 Calcular la freqüència angular, $\omega = \pi$ rad/s.

0,2 Trobar la fase inicial a partir de $y(0) = A$: $\varphi_0 = \pi/2$ rad.

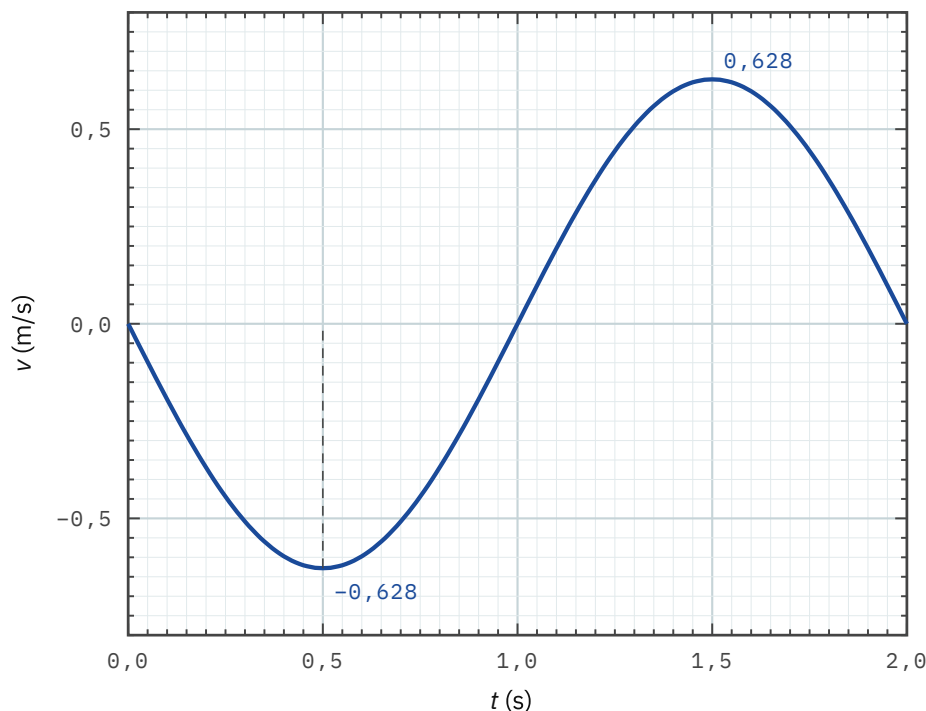
0,25 Escriure l'equació del moviment, $y(t) = 0,2 \cdot \sin(\pi t + \pi/2)$ (o la forma equivalent amb cosinus).

b)

Velocitat. $v(t) = dy/dt = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow v(t) = 0,628 \cdot \cos(\pi t + \pi/2)$, amb t en s i v en m/s. Com que el cosinus val com a màxim 1: $v_{\max} = A\omega = 0,20 \cdot \pi = 0,628$ m/s.

Acceleració. $a(t) = dv/dt = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot y(t) \rightarrow a(t) = -1,97 \cdot \sin(\pi t + \pi/2)$, amb t en s i a en m/s^2 . El valor màxim de $-\sin(\omega t + \varphi_0)$ és 1: $a_{\max} = A\omega^2 = 0,20 \cdot \pi^2 = 1,97$ m/s^2 .

Gràfic de la velocitat. Un període dura $T = 1/f = 2$ s, que ocupa les quatre divisions grans horitzontals (0,5 s cadascuna). En vertical prenem 0,5 m/s per divisió gran, amb el zero a la línia gruixuda del mig. Com que $\cos(\pi t + \pi/2) = -\sin(\pi t)$, la velocitat comença a zero (la boia és dalt de tot), arriba a $-0,628$ m/s a 0,5 s (passa per l'equilibri baixant), torna a zero a 1 s (punt més baix), val 0,628 m/s a 1,5 s i torna a zero a 2 s.



Velocitat de la boia durant un període (escala: 0,5 s i 0,5 m/s per divisió gran).

Com puntua la pauta

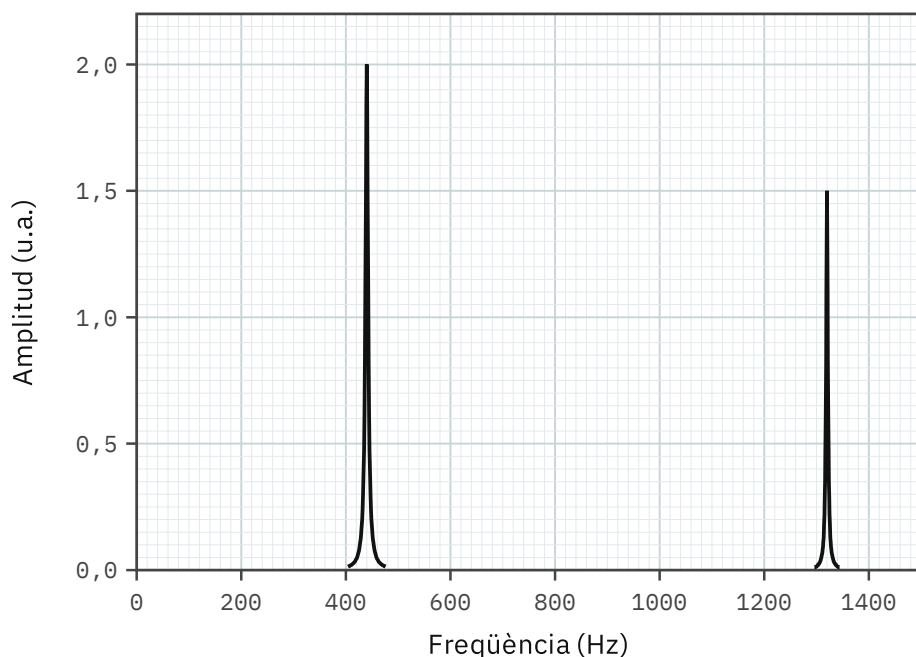
- 0,5** Derivar la posició per obtenir $v(t) = 0,628 \cdot \cos(\pi t + \pi/2)$ i el valor màxim, 0,628 m/s.
- 0,25** Derivar la velocitat per obtenir $a(t) = -1,97 \cdot \sin(\pi t + \pi/2)$ i el valor màxim, 1,97 m/s².
- 0,5** Representar la velocitat durant un període amb escala. Es resten 0,1 punts sense títol a l'eix, 0,2 sense unitats i 0,2 si la fase inicial no correspon a l'equació; sense escala o mal representat, zero.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

42. L'espectre d'un oboè i un quintet de vent ★★

PAU Juny 2022 · Sèrie 2 · P7

Per a identificar els instruments musicals es pot utilitzar un espectre de freqüències. A la figura següent es representa l'espectre d'un instrument que es vol identificar. L'oboè és un instrument que té un extrem obert i un extrem tancat que és l'embocadura amb una canya. A l'extrem obert, l'amplitud de la vibració de les molècules és màxima: tenim un ventre. En canvi, a l'altre extrem, el tudell per on es bufa és una canya que comunica pressió a l'aire i impedeix que aquest es pugui moure amb llibertat: és un node. D'altra banda, en un piano les cordes estan pinçades pels dos extrems, és a dir, els dos extrems de la corda són nodes.



Espectre de freqüències de l'instrument que es vol identificar.

- a) Quina és la freqüència fonamental d'aquest espectre? Determineu si es tracta d'un oboè o d'un piano, i justifiqueu la resposta. Determineu també la llargària del tub o de la corda. [1,25 punts]
- b) Un quintet de vent acostuma a estar format per cinc instrumentistes, normalment flauta travessera, oboè, clarinet, trompa i fagot. A l'inici de la interpretació d'una composició tots 5 toquen de forma suau i amb la mateixa intensitat, generant un nivell d'intensitat sonora de 80 dB a un espectador que es troba a una distància d'1,5 m. Quina és la potència sonora de cada instrument? Supposeu que aquesta potència es distribueix uniformement per tota l'àrea d'una semiesfera. [1,25 punts]

Dades: $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

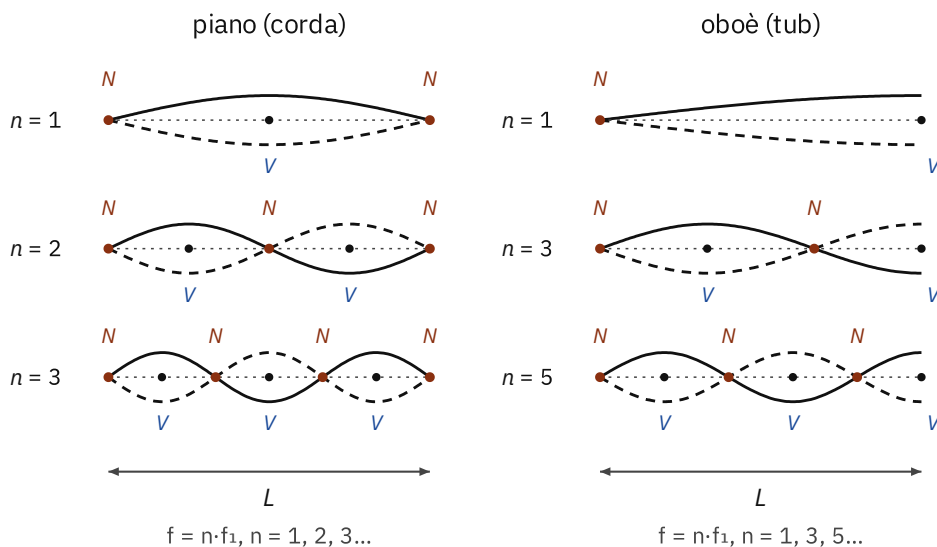
La velocitat del so en l'aire és de 340 m s^{-1} .

▼ Solució

a)

Freqüència fonamental. El primer pic de l'espectre, el de freqüència més baixa, és l'harmònic fonamental: $f_1 = 440 \text{ Hz}$.

Harmònics de cada instrument. A la corda del piano els dos extrems són nodes, i hi caben un nombre enter de mitges longituds d'ona: $L = n \cdot \lambda / 2 \rightarrow f = n \cdot v / (2L) = n \cdot f_1$, amb $n = 1, 2, 3 \dots$. Al tub de l'oboè hi ha un node a l'embocadura i un ventre a l'extrem obert, i hi caben un nombre senar de quarts de longitud d'ona: $L = n \cdot \lambda / 4 \rightarrow f = n \cdot v / (4L) = n \cdot f_1$, amb $n = 1, 3, 5 \dots$



Primers modes d'una corda fixa pels dos extrems i d'un tub amb un extrem tancat (node, N) i un d'obert (ventre, V).

Identificació. Si fos un piano, el pic següent seria el segon harmònic, $f_2 = 2 \cdot 440 = 880$ Hz. En un oboè aquest harmònic no existeix, i el següent és el tercer, $f_3 = 3 \cdot 440 = 1\,320$ Hz. L'espectre no té cap pic a 880 Hz i sí que en té un a 1 320 Hz, de manera que **és un oboè**.

Llargària del tub. Per al fonamental de l'oboè, $f_1 = v / (4L) \rightarrow L = v / (4f_1) = 340 / (4 \cdot 440) = 0,193$ m.

Com puntua la pauta

0,3 Identificar el primer pic de l'espectre com el fonamental, $f_1 = 440$ Hz.

0,65 Relacionar les condicions de contorn amb els harmònics permesos (tots a la corda, només els senars al tub) i concloure que és un oboè perquè després de 440 Hz apareix 1 320 Hz i no 880 Hz.

0,3 Calcular la llargària del tub, $L = v / (4f_1) = 0,193$ m.

b)

Intensitat de cada instrument. Els cinc instruments sonen amb la mateixa intensitat I , i les intensitats se sumen: la total és $5I$. Del nivell d'intensitat sonora: $\beta = 10 \cdot \log(5I/I_0) \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} / 5 = 10^{-12} \cdot 10^{8/5} / 5 = 2,00 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

Potència de cada instrument. La potència es reparteix sobre una semiesfera de radi r , d'àrea $2\pi r^2$: $I = P / (2\pi r^2) \rightarrow P = I \cdot 2\pi r^2 = 2,00 \cdot 10^{-5} \cdot 2\pi \cdot 1,5^2 = 2,83 \cdot 10^{-4} \text{ W}$.

Com puntua la pauta

0,65 Plantejar el nivell sonor amb la intensitat total $5I$ i obtenir la intensitat d'un instrument, $2,00 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

0,6 Relacionar intensitat i potència amb l'àrea de la semiesfera ($2\pi r^2$) i obtenir $P = 2,83 \cdot 10^{-4} \text{ W}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Magnificat en re major (BWV 243) és una de les grans obres vocals de Johann Sebastian Bach, publicada el 1723 i escrita per a cor a cinc veus i orquestra. La corda d'un violí fa 32,5 cm de llargària i la freqüència fonamental corresponent al re major és de 38,89 Hz.

- a) Dibuixeu l'harmònic fonamental i el tercer harmònic i indiqueu-ne els nodes i els ventres. Determineu les longituds d'ona de cadascun dels harmònics i calculeu la velocitat de propagació de l'ona que produeix aquesta nota en la corda del violí. Quina serà la freqüència de l'harmònic fonamental si reduïm la llargària de la corda a 27 cm tot mantenint la mateixa tensió a la corda? [1,25 punts]
- b) Un espectador situat al segon pis del Palau de la Música Catalana percep un nivell d'intensitat sonora de 30 dB, corresponent al so dels violins, situats a 23 m. Quina és la potència amb què els violins emeten el so? Si, degut a les restriccions per la COVID-19, el nombre de violinistes es redueix a la meitat, quin serà el nivell de la intensitat sonora generada pels violins a 23 m de distància? [1,25 punts]

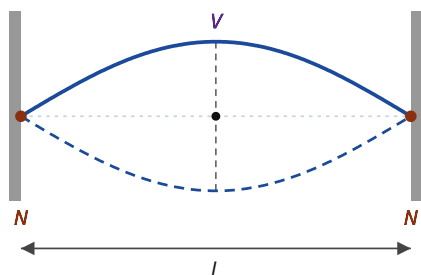
Dada: $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

▼ Solució

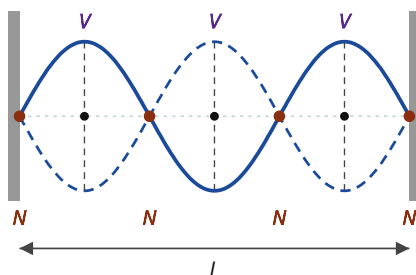
a)

Dibuix dels harmònics. La corda està subjecta pels dos extrems, que per força són nodes. El fonamental té un sol ventre, al centre; el tercer harmònic té tres ventres i quatre nodes.

Fonamental



Tercer harmònic



Harmònic fonamental (2 nodes, 1 ventre) i tercer harmònic (4 nodes, 3 ventres) de la corda del violí. Les línies contínua i discontinua són les dues posicions extremes de la corda; N = node, V = ventre.

Longitud d'ona del fonamental. Dins la corda hi ha mitja longitud d'ona: $\lambda = 2L = 2 \cdot 0,325 = 0,65 \text{ m}$.

Longitud d'ona del tercer harmònic. Hi caben tres mitges longituds d'ona: $\lambda = 2L/3 = 2 \cdot 0,325/3 = 0,217 \text{ m}$.

Velocitat de propagació. Amb les dades del fonamental: $v = \lambda \cdot f = 0,65 \cdot 38,89 = 25,3 \text{ m/s}$.

Corda més curta: velocitat. La velocitat de les ones en una corda depèn de la tensió i de la massa per unitat de longitud, que no canvien. Per tant, $v' = v = 25,3 \text{ m/s}$.

Nova freqüència fonamental. Amb $L' = 0,27 \text{ m}$, el fonamental té $\lambda' = 2L' = 0,54 \text{ m}$, i de $v = \lambda' \cdot f'$: $f' = v/\lambda' = 25,3/0,54 = 46,8 \text{ Hz}$.

Com puntua la pauta

0,25 Dibuixar el fonamental i el tercer harmònic amb un node a cada extrem i els ventres indicats.

0,1 Longitud d'ona del fonamental, $\lambda = 2L = 0,65 \text{ m}$.

0,1 Longitud d'ona del tercer harmònic, $\lambda = 2L/3 = 0,217 \text{ m}$.

0,3 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda \cdot f = 25,3 \text{ m/s}$.

0,3 Raonar que, amb la mateixa tensió, la velocitat de propagació no canvia.

0,1 Longitud d'ona del nou fonamental, $\lambda' = 2L' = 0,54 \text{ m}$.

0,1 Nova freqüència fonamental, $f' = v/\lambda' = 46,8 \text{ Hz}$.

b)

Intensitat a 23 m. Aïllem la intensitat de la definició de nivell: $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0) \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 10^{-12} \cdot 10^3 = 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$.

Potència dels violins. Considerant que el so es reparteix sobre una esfera de radi 23 m, $I = P/A \rightarrow P = I \cdot 4\pi r^2 = 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 23^2 = 6,65 \cdot 10^{-6} \text{ W}$.

Potència amb la meitat de violinistes. Amb la meitat de violins, la potència emesa es redueix a la meitat: $P' = P/2 = 3,32 \cdot 10^{-6} \text{ W}$.

Nou nivell d'intensitat. La intensitat també es fa la meitat: $I' = P'/A = I/2 = 5,00 \cdot 10^{-10} \text{ W m}^{-2}$, i $\beta' = 10 \cdot \log(I'/I_0) = 10 \cdot \log(5,00 \cdot 10^{-10}/10^{-12}) = 27,0 \text{ dB}$. Equivalentment, $\beta' = 30 - 10 \cdot \log 2 = 30 - 3,0 = 27,0 \text{ dB}$.

Com puntua la pauta

0,3 Obtenir la intensitat a partir del nivell, $I = I_0 \cdot 10^{(\beta/10)} = 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$.

0,3 Calcular la potència, $P = I \cdot 4\pi r^2 = 6,65 \cdot 10^{-6} \text{ W}$.

0,2 Reduir la potència a la meitat, $P' = 3,32 \cdot 10^{-6} \text{ W}$.

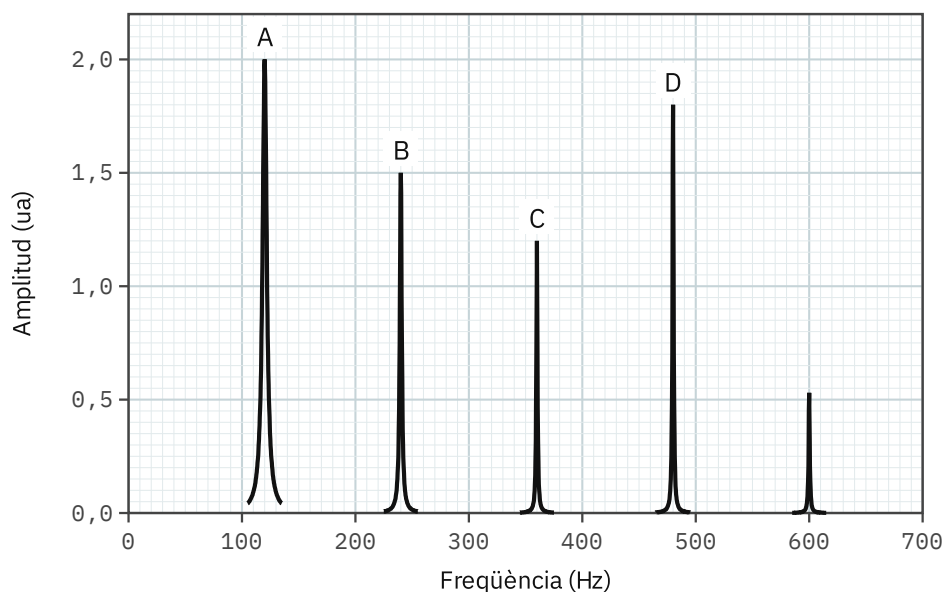
0,45 Calcular el nou nivell d'intensitat, 27,0 dB (amb $I' = I/2$ o restant $10 \cdot \log 2$).

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

44. L'espectre d'una corda de 40 cm ★★

PAU Setembre 2020 · Sèrie 4 · P7

Quan es fa vibrar una corda de 40,0 cm de llargada i fixada pels dos extrems emet un so que, un cop analitzat, produeix l'espectre següent:



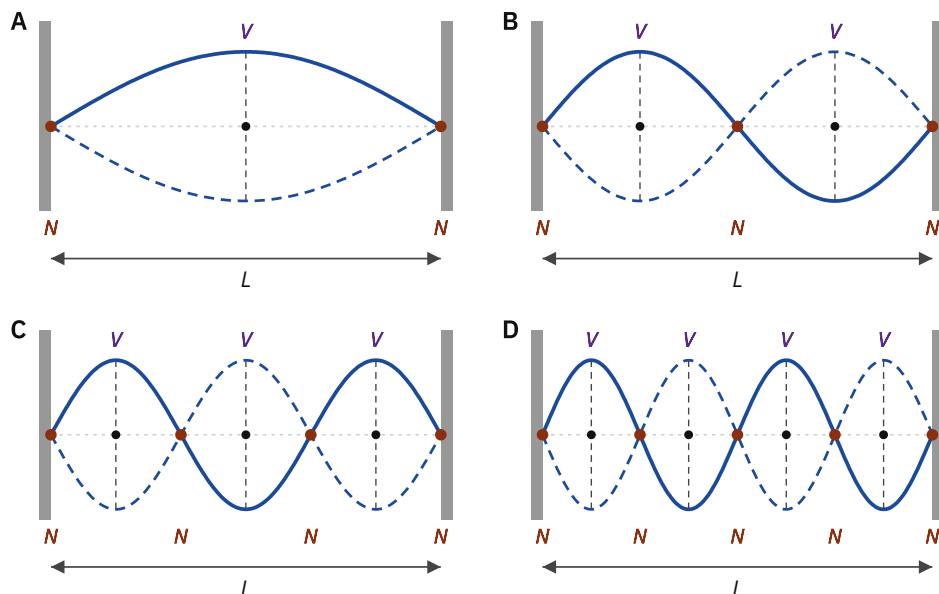
Espectre del so emès per la corda.

- a) Representeu esquemàticament les ones estacionàries corresponents als pics A, B, C i D indicant tots els nodes i tots els ventres. Calculeu la longitud d'ona de cadascuna d'aquestes quatre ones estacionàries. Quina és la velocitat de propagació? [1,25 punts]
- b) La longitud de la corda disminueix fins a 20,0 cm sense que canviï la velocitat de propagació de les ones per la corda. Quines seran les freqüències i les longituds d'ona de les quatre primeres ones estacionàries? [1,25 punts]

▼ Solució

a)

Quins harmònics són. Els pics A, B, C i D són a 120, 240, 360 i 480 Hz, és a dir, a 1, 2, 3 i 4 vegades 120 Hz: A és l'harmònic fonamental i B, C i D són el segon, el tercer i el quart harmònic. Com que la corda és fixa pels dos extrems, a cada extrem hi ha un node, i l'harmònic n té n ventres i $n + 1$ nodes.



Ones estacionàries dels pics A (fonamental), B, C i D (2n, 3r i 4t harmònics). Les línies contínua i discontinua són les dues posicions extremes de la corda; N = node, V = ventre.

Longituds d'ona. Dins la corda hi caben n mitges longituds d'ona, $L = n \cdot \lambda / 2$:

A: $\lambda_A = 2L = 0,800 \text{ m}$

B: $\lambda_B = L = 0,400 \text{ m}$

C: $\lambda_C = 2L/3 = 0,267 \text{ m}$

D: $\lambda_D = L/2 = 0,200 \text{ m}$

Velocitat de propagació. $v = \lambda_A / T = \lambda_A \cdot f_A = 0,800 \cdot 120 = 96 \text{ m/s}$. Amb qualsevol altre pic surt el mateix: $0,400 \cdot 240 = 0,267 \cdot 360 = 0,200 \cdot 480 = 96 \text{ m/s}$.

Com puntua la pauta

0,6 Dibuixar les quatre ones estacionàries amb els nodes i els ventres (−0,2 p si els nodes no són correctes i −0,2 p si no ho són els ventres).

0,1 Longitud d'ona de A: $\lambda = 2L = 0,800 \text{ m}$.

0,1 Longitud d'ona de B: $\lambda = L = 0,400 \text{ m}$.

0,1 Longitud d'ona de C: $\lambda = 2L/3 = 0,267 \text{ m}$.

0,1 Longitud d'ona de D: $\lambda = L/2 = 0,200 \text{ m}$.

0,25 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda \cdot f = 96 \text{ m/s}$, amb qualsevol dels harmònics.

b)

Longituds d'ona amb la corda de 20,0 cm. Les relacions $\lambda = 2L/n$ no canvien, però ara la longitud és la meitat; per tant, les longituds d'ona també es redueixen a la meitat: $\lambda_A = 2L = 0,400 \text{ m}$, $\lambda_B = L = 0,200 \text{ m}$, $\lambda_C = 2L/3 = 0,133 \text{ m}$ i $\lambda_D = L/2 = 0,100 \text{ m}$.

Freqüències. Com que la velocitat és la mateixa, $f = v/\lambda$: si la longitud d'ona es fa la meitat, la freqüència es duplica. $f_A = 240 \text{ Hz}$, $f_B = 480 \text{ Hz}$, $f_C = 720 \text{ Hz}$ i $f_D = 960 \text{ Hz}$.

Com puntua la pauta

0,65 Raonar que les longituds d'ona es redueixen a la meitat: 0,400, 0,200, 0,133 i 0,100 m.

0,6 Deducir amb $f = v/\lambda$ que les freqüències es dupliquen: 240, 480, 720 i 960 Hz.

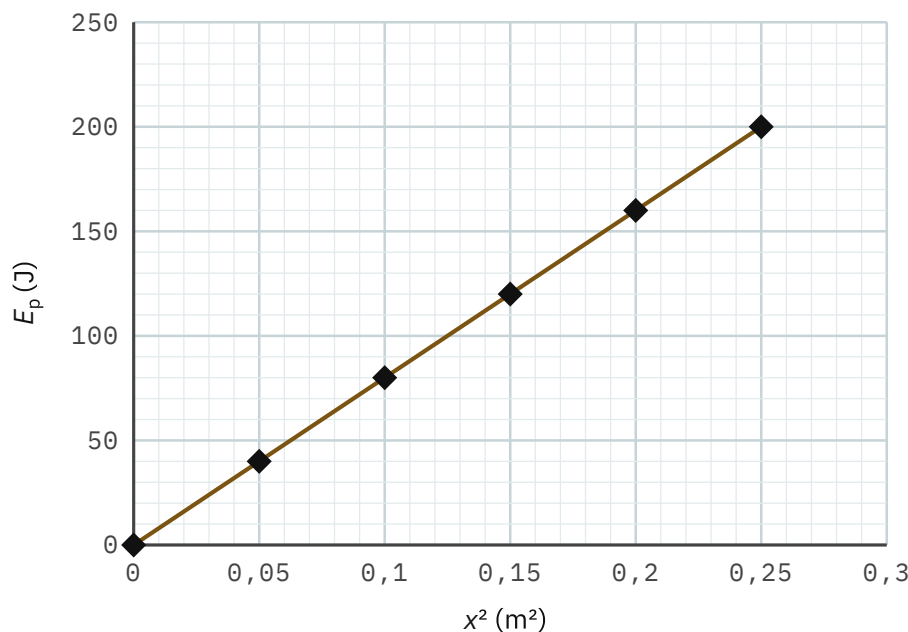
Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

45. Energia potencial en funció de x^2 i l'ona que genera ★★

PAU Setembre 2019 · Sèrie 5 · P1

La gràfica següent mostra l'energia potencial elàstica d'un oscil·lador harmònic en funció del quadrat de la seva elongació.

L'oscil·lador té una massa de 62,5 g.



Energia potencial elàstica en funció del quadrat de l'elongació.

- a) Calculeu el període d'oscil·lació. Si l'oscil·lador descriu un moviment vibratori harmònic amb una amplitud de 60 cm, calculeu-ne l'energia cinètica màxima. [1 punt]
- b) L'oscil·lació genera una ona en una corda que es propaga a una velocitat de 30 m s^{-1} . Escriviu l'equació de l'ona que es propaga per la corda. [1 punt]

▼ Solució

a)

Pendent de la recta. L'energia potencial elàstica és $E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$; per tant, si representem E_p en funció de x^2 , surt una recta que passa per l'origen i té pendent $k/2$. Llegint el punt $(0,25 \text{ m}^2; 200 \text{ J})$: pendent = $\Delta E_p / \Delta(x^2) = 200 / 0,25 = 800 \text{ J/m}^2$.

Constant elàstica. $k/2 = 800 \rightarrow k = 2 \cdot 800 = 1\,600 \text{ N/m}$.

Període. $T = 2\pi \cdot \sqrt{(m/k)} = 2\pi \cdot \sqrt{(0,0625/1\,600)} = 0,039 \text{ s}$ (0,0393 s).

Energia cinètica màxima. L'energia cinètica és màxima a la posició d'equilibri, on tota l'energia mecànica és cinètica: $E_{c,\text{màx}} = E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,600 \cdot 0,60^2 = 288 \text{ J}$.

Com puntua la pauta

0,2 Reconèixer que el pendent de la recta és $k/2$ i calcular-lo (800 J/m^2).

0,2 Obtenir la constant elàstica, $k = 1\,600 \text{ N/m}$.

0,2 Calcular el període amb $T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k}$: 0,039 s.

0,4 Igualar l'energia cinètica màxima a l'energia mecànica $\frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$ i obtenir 288 J.

b)

Magnituds de l'ona. Cada punt de la corda oscil·la amb el període de l'oscil·lador. La longitud d'ona és $\lambda = v \cdot T = 30 \cdot 0,0393 = 1,18$ m. El nombre d'ona (l'escrivim κ per no confondre'l amb la constant elàstica k) és $\kappa = 2\pi/\lambda = 5,33$ m⁻¹, i la freqüència angular, $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m} = \sqrt{1600/0,0625} = 160$ rad/s.

Equació general. Per a una ona harmònica que avança en el sentit positiu de l'eix x , l'elongació transversal y de cada punt de la corda és $y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - \kappa x)$. Aquí x és la posició al llarg de la corda. També és vàlida la forma amb cosinus o escrita amb T i λ .

Equació amb valors. Amb la mateixa amplitud que l'oscil·lador, $A = 0,60$ m:

$y(x, t) = 0,60 \cdot \sin(160 \cdot t - 5,33 \cdot x)$, amb x i y en m i t en s.

Com puntua la pauta

0,4 Calcular la longitud d'ona ($\lambda = v \cdot T$), el nombre d'ona ($5,33$ m⁻¹) i la freqüència angular (160 rad/s).

0,2 Escriure l'expressió general de l'ona, $y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - \kappa x)$ o una d'equivalent.

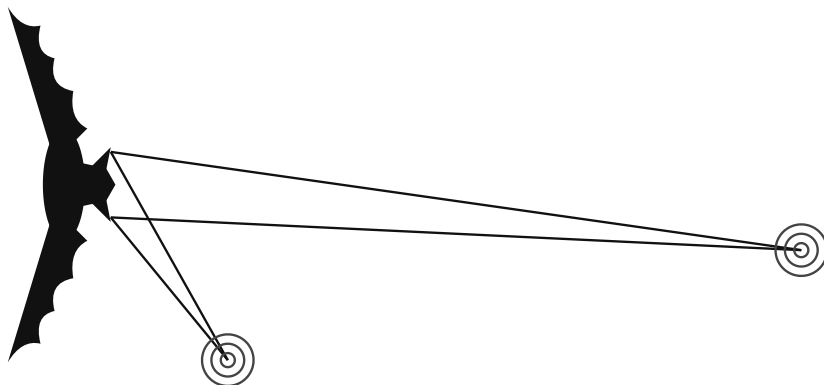
0,4 Escriure l'equació amb els valors, $y(x, t) = 0,60 \cdot \sin(160t - 5,33x)$ en unitats del SI.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

46. El ratpenat que localitza un mosquit ★★

PAU Juny 2016 · Sèrie 3 · P3 · Opció A

Els ratpenats emeten uns xiscles en forma d'ultrasons i utilitzen els ecos d'aquests ultrasons per a orientar-se i per a detectar obstacles i preses. Una espècie de ratpenats emet ultrasons amb una freqüència de 83,0 kHz quan caça mosquits.



El ratpenat i el mosquit en dues posicions: les línies uneixen cada orella amb el mosquit (esquema redibuixat de la figura de l'examen).

- a) Calculeu la longitud d'ona i el període dels ultrasons emesos per aquests ratpenats. Considereu un mosquit situat a 1,5000 m de l'orella dreta i a 1,5030 m de l'orella esquerra del ratpenat. Calculeu la diferència de fase en l'eco percebut per cada orella, provinent del mosquit. [1 punt, segons la pauta]
- b) Quan el mosquit està més a prop, el ratpenat també podria utilitzar la diferència d'intensitats dels ecos. Calculeu el quocient d'intensitats sonores $I_{\text{dreta}}/I_{\text{esquerra}}$ quan el mosquit està a 33 cm de l'orella dreta i a 34 cm de l'orella esquerra i expresseu en decibels la diferència de nivells d'intensitat sonora. Considereu que l'eco es propaga uniformement des del mosquit en totes les direccions de l'espai. [1 punt, segons la pauta]

Dada: Velocitat dels ultrasons en l'aire = 340 m s^{-1} .

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. La longitud d'ona és la distància que recorre l'ona en un període: $\lambda = v/f = 340/(83,0 \cdot 10^3) = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,1 \text{ mm}$.

Període. $T = 1/f = 1/(83,0 \cdot 10^3) = 1,20 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 12 \text{ } \mu\text{s}$.

Fase a cada orella. L'eco surt del mosquit i viatja fins a cada orella com una ona harmònica $y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx)$, en què x és la distància recorreguda. En un mateix instant, la fase només canvia pel terme kx , de manera que la diferència de fase entre les dues orelles és $kx_1 - kx_2$, en valor absolut $k \cdot (x_2 - x_1)$, amb $k = 2\pi/\lambda$.

Diferència de fase. $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda) \cdot (x_2 - x_1) = 2\pi/(4,1 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,5030 - 1,5000) = 4,60 \text{ rad}$. Com que una fase es defineix llevat de múltiples de 2π , és equivalent dir que una ona va $2\pi - 4,60 \approx 1,68 \text{ rad}$ avançada respecte de l'altra (la pauta ho escriu 1,69 rad).

Com puntua la pauta

- 0,2 Calcular la longitud d'ona, $\lambda = v/f = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
- 0,2 Calcular el període, $T = 1/f = 1,20 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.
- 0,3 Escriure l'equació de l'ona i expressar la diferència de fase com $k \cdot x_1 - k \cdot x_2$.
- 0,3 Obtenir la diferència de fase, 4,60 rad (o el valor equivalent $2\pi - 4,60$).

b)

Intensitat a una distància R. El mosquit reemet l'ultrasò amb una potència W que es reparteix per igual sobre esferes centrades en ell: $I = W/(4\pi R^2)$. La intensitat és inversament proporcional al quadrat de la distància.

Quocient d'intensitats. Dividint les dues expressions, W i 4π se simplifiquen: $I_{\text{dreta}}/I_{\text{esquerra}} = R_{\text{esquerra}}^2/R_{\text{dreta}}^2 = 34^2/33^2 = 1,06$.

Diferència de nivells. Cada nivell és $L = 10 \cdot \log(I/I_0)$. En restar-los, I_0 desapareix: $L_{\text{dreta}} - L_{\text{esquerra}} = 10 \cdot \log(I_{\text{dreta}}/I_0) - 10 \cdot \log(I_{\text{esquerra}}/I_0) = 10 \cdot \log(I_{\text{dreta}}/I_{\text{esquerra}}) = 10 \cdot \log 1,06 = 0,26 \text{ dB}$.

Com puntua la pauta

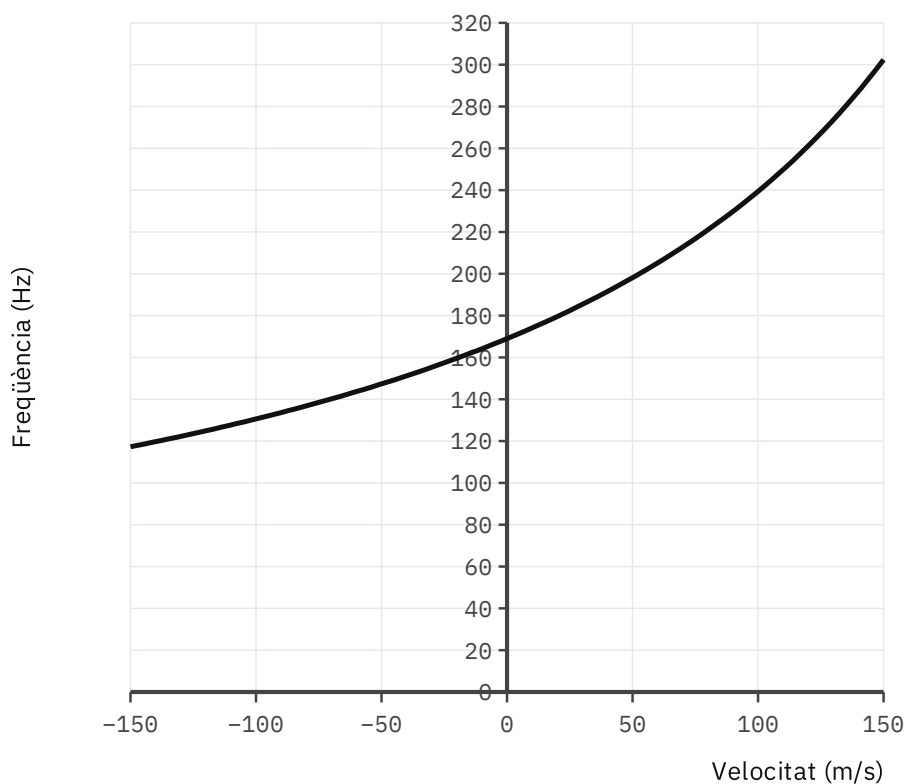
- 0,2 Escriure la intensitat d'una ona esfèrica, $I = W/(4\pi R^2)$.
- 0,3 Obtenir el quocient d'intensitats, $34^2/33^2 = 1,06$.
- 0,5 Expressar la diferència de nivells com $10 \cdot \log(I_{\text{dreta}}/I_{\text{esquerra}})$ i obtenir 0,26 dB.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

47. Efecte Doppler en una gràfica i intensitats en una taula ★★

PAU Setembre 2015 · Sèrie 5 · P2

Hem construït aquesta gràfica a partir de dades de freqüència recollides quan una font de so es movia acostant-se a nosaltres (velocitats positives) o allunyant-se'n (velocitats negatives), a velocitats diferents.



Freqüència percebuda en funció de la velocitat de la font (positiva si s'acosta, negativa si s'allunya).

- a) Com s'anomena el fenomen que hem estudiat en aquest experiment? La font de so s'acosta a nosaltres amb un moviment rectilini uniforme (MRU) a 100 m s^{-1} i ens sobrepassa. Quin canvi de freqüència (expressada en Hz) sentirem en el moment en què passi just pel nostre costat? La freqüència que sentirem augmentarà o disminuirà? [1 punt, segons la pauta]
- b) La taula següent mostra com disminueix la intensitat sonora quan ens situem a diferents distàncies d'un emissor puntual de so.

Distància (m)	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0	35,0
$I (\text{mW m}^{-2})$	0,080	0,020	0,0089	0,0050	0,0032	0,0022	0,0016

Calculeu a quina distància, aproximadament, haurem d'estar perquè el nivell de sensació sonora sigui de 65 dB i calculeu la potència de la font sonora, suposant que emet igual en totes les direccions.

[1 punt, segons la pauta]

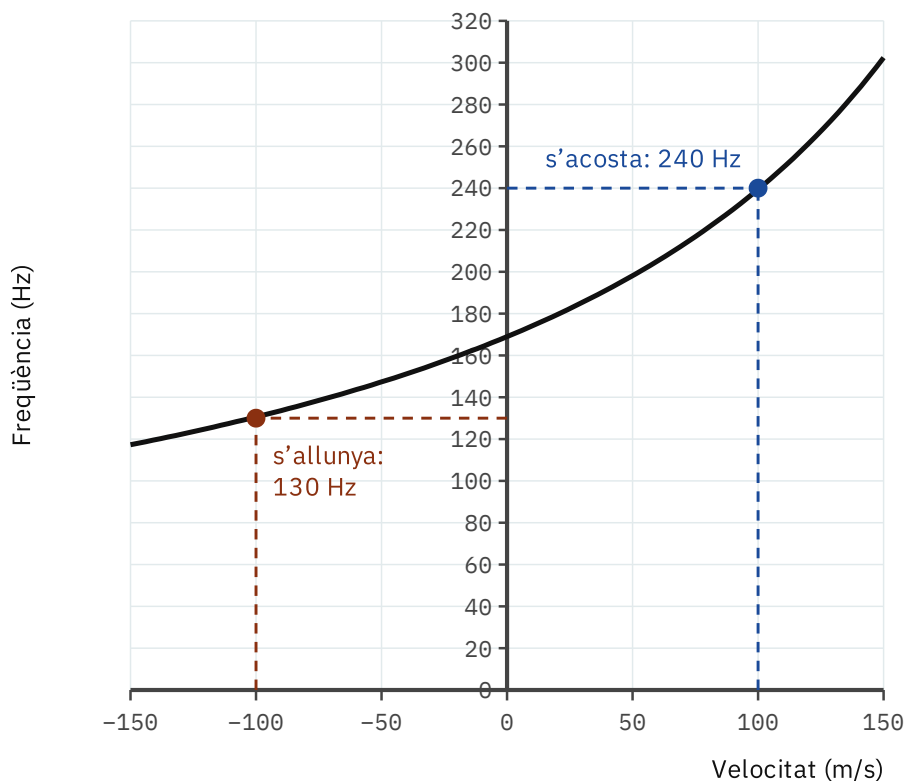
Dada: Intensitat del llindar d'audició (0 dB), $I_0 = 1,00 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$

▼ Solució

a)

El fenomen. La gràfica mostra que la freqüència que percebem canvia segons la velocitat amb què es mou la font: és l'**efecte Doppler**.

Lectura de la gràfica. Mentre la font s'acosta a 100 m/s ($v = +100$ m/s) sentim uns 240 Hz; quan ens ha sobrepassat i s'allunya a la mateixa velocitat ($v = -100$ m/s), uns 130 Hz. Quan s'acosta sentim la freqüència més alta.



Lectura de la gràfica a +100 m/s (la font s'acosta) i a -100 m/s (la font s'allunya).

Canvi de freqüència. Just quan passa pel nostre costat la freqüència salta de 240 Hz a 130 Hz:
 $f_{\text{final}} - f_{\text{inicial}} = 130 - 240 = -110$ Hz.

Augmenta o disminueix? El canvi és negatiu: la freqüència que sentim **disminueix** (el so es torna més greu).

Com puntua la pauta

- 0,2 Identificar el fenomen com l'efecte Doppler.
- 0,2 Llegir a la gràfica 240 Hz per a +100 m/s i 130 Hz per a -100 m/s, i associar la freqüència alta a la font que s'acosta.
- 0,4 Calcular el canvi, $f_{\text{final}} - f_{\text{inicial}} = -110$ Hz.
- 0,2 Concloure que la freqüència disminueix.

b)

Nivell de sensació sonora. $L_I = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

Intensitat corresponent a 65 dB. Aïllant: $I = I_0 \cdot 10^{L_I/10} = 1,00 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{6,5} = 3,2 \cdot 10^{-6}$ W/m².

Distància a la taula. $3,2 \cdot 10^{-6}$ W/m² = 0,0032 mW/m², que és el valor de la taula per a 25 m.

Potència i intensitat. Si la font emet igual en totes les direccions, la potència es reparteix sobre una esfera de radi R : $P = I \cdot 4\pi R^2$.

Potència de la font. $P = 3,2 \cdot 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 25^2 = 0,025 \text{ W}$.

Com puntua la pauta

0,1 Escriure la definició del nivell de sensació sonora, $L_I = 10 \cdot \log(I/I_0)$.

0,2 Aïllar la intensitat, $I = I_0 \cdot 10^{(L_I/10)}$.

0,1 Obtenir $I = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

0,2 Trobar a la taula que aquesta intensitat correspon a 25 m.

0,2 Escriure la relació entre potència i intensitat, $P = I \cdot 4\pi R^2$.

0,2 Calcular la potència, $P = 0,025 \text{ W}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

D'una manera molt simplificada, podem dir que la trompeta és un instrument musical de vent en què les diferents notes són produïdes aplicant aire per un extrem (que es considera tancat a causa de la presència dels llavis del músic) i que s'emeten per l'altre, considerat obert.

Les notes produïdes corresponen a determinats harmònics associats a les ones estacionàries que s'originen a l'instrument. La trompeta consta també de tres pistons que, quan es premen, augmenten de manera efectiva la longitud i canvien les notes emeses.

- a) Si la longitud total del tub que representa la trompeta és $l_0 = 0,975$ m, indiqueu quina és la longitud d'ona i la freqüència dels tres primers modes de vibració estacionaris que es poden generar a la trompeta. [1 punt, segons la pauta]
- b) Quan el músic fa sonar l'instrument mentre prem el segon pistó, produeix la nota *si* de la tercera octava, de freqüència $f = 247$ Hz. Sabent que aquesta nota correspon al segon mode de vibració permès a la cavitat de l'instrument, quina és ara la longitud efectiva de la cavitat? Quin és el recorregut extra Δl que fa l'aire dins de la trompeta quan es prem aquest pistó? [1 punt, segons la pauta]

Dada: Velocitat del so en l'aire, 340 m s^{-1}

▼ Solució

a)

Condició d'ona estacionària. A l'extrem tancat hi ha d'haver un node i a l'extrem obert, un ventre. Entre un node i el ventre següent hi ha un quart de longitud d'ona, i cada fus addicional n'afegeix mitja. Per tant, la longitud del tub ha de complir $l_0 = \lambda_n/4 + n \cdot \lambda_n/2 = (2n + 1) \cdot \lambda_n/4$, amb $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Longituds d'ona possibles. Aïllant: $\lambda_n = 4l_0/(2n + 1)$.

Freqüències possibles. Amb $\lambda = v/f$, on v és la velocitat del so: $f_n = v/\lambda_n = (2n + 1) \cdot v/(4l_0)$. Només hi ha els múltiples senars de la freqüència més baixa.

Els tres primers modes. $n = 0$: $\lambda_0 = 4 \cdot 0,975/1 = 3,90$ m i $f_0 = 340/(4 \cdot 0,975) = 87,2$ Hz.

$n = 1$: $\lambda_1 = 4 \cdot 0,975/3 = 1,30$ m i $f_1 = 3 \cdot 340/(4 \cdot 0,975) = 262$ Hz.

$n = 2$: $\lambda_2 = 4 \cdot 0,975/5 = 0,78$ m i $f_2 = 5 \cdot 340/(4 \cdot 0,975) = 436$ Hz.

Com puntua la pauta

0,2 Plantejar la condició d'ona estacionària en un tub tancat per un extrem: $l_0 = (2n + 1) \cdot \lambda_n/4$.

0,2 Obtenir les longituds d'ona possibles, $\lambda_n = 4l_0/(2n + 1)$.

0,3 Obtenir les freqüències possibles, $f_n = (2n + 1) \cdot v/(4l_0)$.

0,1 Mode $n = 0$: 3,90 m i 87,2 Hz.

0,1 Mode $n = 1$: 1,30 m i 262 Hz.

0,1 Mode $n = 2$: 0,78 m i 436 Hz.

b)

Quin mode és. El segon mode permès correspon a $n = 1$ de les expressions anteriors, és a dir, a una longitud de cavitat $l = 3\lambda/4$.

Longitud efectiva. Amb $\lambda = v/f$: $l = (3/4) \cdot v/f = 3 \cdot 340 / (4 \cdot 247) = 1,03 \text{ m}$.

Recorregut extra. $\Delta l = l - l_0 = 1,032 - 0,975 = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Si abans de restar s'arrodoneix l a 1,03 m, com fa la pauta, surt $5,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Com puntua la pauta

0,2 Identificar el segon mode amb $n = 1$, és a dir, $l = 3\lambda/4$.

0,4 Calcular la longitud efectiva, $l = 3v/(4f) = 1,03 \text{ m}$.

0,4 Calcular el recorregut extra, $\Delta l = l - l_0 \approx 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Cadascun dels extrems d'un diapasó presenta un moviment vibratori harmònic amb una freqüència de 1 000 Hz i una amplitud d'1 mm. Aquest moviment genera en l'aire una ona harmònica de so de la mateixa freqüència. El moviment dels dos extrems està en fase.

- a) Calculeu, per a un dels extrems del diapasó, l'elongació i la velocitat del seu moviment vibratori quan faci $3,3 \cdot 10^{-4}$ s que ha començat a vibrar, comptat a partir de la posició que correspon a la màxima amplitud. [1 punt, segons la pauta]
- b) Raoneu si, en l'aire, es produiria el fenomen d'interferència a partir de les ones de so que es generen en els dos extrems del diapasó. Si s'esdevé aquest fenomen, indiqueu en quins punts es produiran els màxims d'interferència. [1 punt, segons la pauta]

Dada: $v_{\text{so a l'aire}} = 340$ m/s.

▼ Solució

a)

Forma general i fase inicial. Escrivim l'elongació d'un extrem com $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Comencem a comptar el temps quan l'extrem és a la posició de màxima amplitud, $y(0) = A$: $\sin \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \pi/2$ rad.

Freqüència angular. $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1\,000 = 2\,000\pi$ rad/s.

Equació del moviment. Amb $A = 1$ mm = 10^{-3} m, i com que $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$:
 $y = 10^{-3} \cdot \cos(2\,000\pi t)$, amb y en m i t en s.

Equació de la velocitat. Derivant: $v = dy/dt = -10^{-3} \cdot 2\,000\pi \cdot \sin(2\,000\pi t) \rightarrow$
 $v = -2\pi \cdot \sin(2\,000\pi t)$, amb v en m/s i t en s.

Valors a $t_0 = 3,3 \cdot 10^{-4}$ s. L'angle és $2\,000\pi \cdot 3,3 \cdot 10^{-4} = 0,66\pi$ rad. Llavors $y(t_0) = 10^{-3} \cdot \cos(0,66\pi) = -4,82 \cdot 10^{-4}$ m i $v(t_0) = -2\pi \cdot \sin(0,66\pi) = -5,51$ m/s.

Com puntua la pauta

- 0,3 Imposar que a $t = 0$ l'extrem és a $y = A$ i obtenir $\varphi = \pi/2$ (o $\varphi = 0$ si s'usa el cosinus).
- 0,1 Calcular $\omega = 2\,000\pi$ rad/s.
- 0,2 Escriure l'equació de l'elongació amb valors i unitats.
- 0,2 Derivar per obtenir l'equació de la velocitat, amb unitats.
- 0,1 Calcular l'elongació a t_0 : $-4,82 \cdot 10^{-4}$ m.
- 0,1 Calcular la velocitat a t_0 : $-5,51$ m/s.

b)

Hi ha interferència. Sí. Els dos extrems emeten ones sonores amb la mateixa freqüència i la mateixa amplitud i, a més, vibren en fase. Són dues fonts coherents, i a cada punt de l'aire on arriben totes dues ones aquestes se superposen: hi ha interferència.

Condicció de màxim. Siguin r_1 i r_2 les distàncies d'un punt a cadascun dels extrems. Les dues ones hi arriben en fase (interferència constructiva) si la diferència de camins és un nombre

enter de longituds d'ona: $r_2 - r_1 = n \cdot \lambda$, amb $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Longitud d'ona. $\lambda = v_{\text{so a l'aire}}/f = 340/1\,000 = 0,340 \text{ m}$.

Punts de màxim. Els màxims d'interferència són als punts on $r_2 - r_1 = 0,340 \cdot n \text{ m}$, amb $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Com puntua la pauta

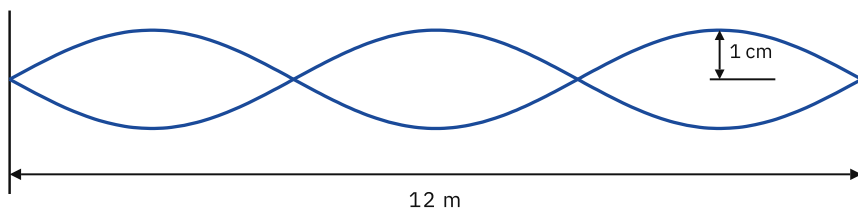
- 0,5** Afirmar que hi ha interferència i justificar-ho: mateixa amplitud, mateixa freqüència i fonts en fase (0,3 si només s'afirma).
- 0,2** Condició de màxim: diferència de camins igual a un múltiple de λ .
- 0,1** Calcular $\lambda = v/f = 0,340 \text{ m}$.
- 0,2** Expressar els punts de màxim: $r_2 - r_1 = 0,340 \cdot n$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

50. Ona estacionària de tres fusos en 12 m ★★

PAU Juny 2010 · Sèrie 5 · P3 · Opció B

El dibuix següent representa una ona estacionària que s'ha generat en una corda tensa quan una ona harmònica que es propagava cap a la dreta s'ha superposat amb la que s'ha reflectit en un extrem.



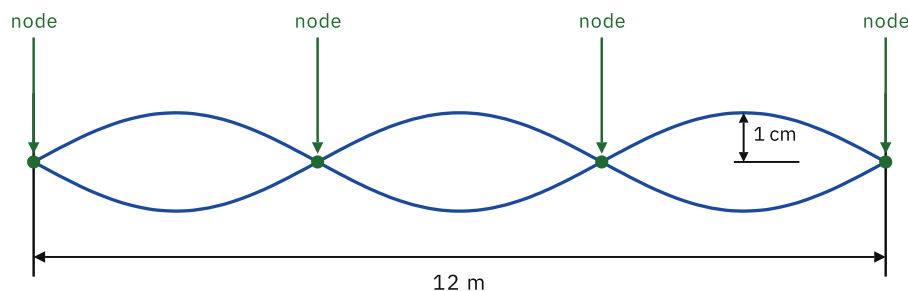
Ona estacionària a la corda tensa.

- a) Indiqueu-ne els nodes. Determineu la distància entre nodes i la longitud d'ona estacionària. Quina és l'amplitud de les ones que, en superposar-se, han originat l'ona estacionària?
[1 punt, segons la pauta]
- b) Sabent que cada punt de la corda vibra a raó de trenta vegades per segon, escriviu l'equació de l'ona inicial (si suposem que $y(0, 0) = 0$) i calculeu-ne la velocitat de propagació.
[1 punt, segons la pauta]

▼ Solució

a)

Nodes. Els nodes són els punts de la corda que no vibren mai, on es creuen les dues corbes del dibuix. N'hi ha quatre: els dos extrems i dos punts interiors.



Els quatre nodes de l'ona estacionària: els dos extrems i els punts situats a 4 m i a 8 m.

Distància entre nodes. Entre el primer i l'últim node hi ha tres fusos, que ocupen els 12 m de la corda: $d_{\text{nodes}} = 12/3 = 4$ m.

Longitud d'ona. Dos nodes consecutius estan separats mitja longitud d'ona: $\lambda = 2 \cdot d_{\text{nodes}} = 2 \cdot 4 = 8$ m.

Amplitud de les ones que se superposen. Als ventres les dues ones arriben en fase i les seves amplituds se sumen. El dibuix indica 1 cm de l'eix a la cresta, de manera que cada ona té $A_{\text{individual}} = 1/2 = 0,5$ cm.

Com puntua la pauta

0,4 Assenyalar els quatre nodes (0,1 per node).

- 0,2 Calcular la distància entre nodes, $12/3 = 4$ m.
0,2 Obtenir $\lambda = 2 \cdot d = 8$ m.
0,2 Deduir que l'amplitud de cada ona és la meitat, 0,5 cm.

b)

Forma de l'equació. L'ona inicial avança cap a la dreta (sentit positiu de l'eix x): $y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi)$.

Nombre d'ona. $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/8 = \pi/4 \text{ m}^{-1}$.

Freqüència angular. Cada punt fa 30 vibracions per segon, $f = 30 \text{ Hz}$: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \text{ rad/s}$.

Fase inicial. $y(0, 0) = A \cdot \sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$.

Equació de l'ona inicial. Amb $A = 0,5 \text{ cm}$: $y(x, t) = 0,5 \cdot \sin(60\pi t - \pi x/4)$, amb y en cm, t en s i x en m.

Velocitat de propagació. $v = \lambda \cdot f = 8 \cdot 30 = 240 \text{ m/s}$.

Com puntua la pauta

- 0,2 Calcular $k = 2\pi/\lambda = \pi/4 \text{ m}^{-1}$.
0,2 Calcular $\omega = 2\pi f = 60\pi \text{ rad/s}$.
0,1 Imposar $y(0, 0) = 0$ i obtenir $\varphi = 0$.
0,2 Escriure l'equació de l'ona amb valors i unitats.
0,3 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda \cdot f = 240 \text{ m/s}$.

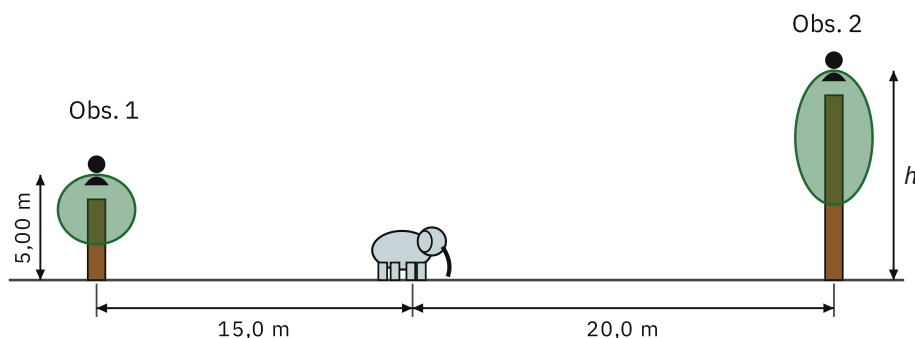
Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

51. Elefants: decibels des dels arbres i punts de silenci ★★

PAU Setembre 2026 · Sèrie 2 · Exercici 3 · Opció A

Un elefant es troba en un parc nacional i, en un moment determinat, és observat per dos investigadors amagats en arbres amb l'objectiu de fer un estudi científic.

- 3.1.** L'elefant bramula i l'observador 1 percep un nivell d'intensitat sonora de 65,0 dB. Aquest observador es troba a una distància horitzontal de 15,0 m de l'elefant i està situat a una altura de 5,00 m sobre el terra. Un segon observador percep el so amb un nivell d'intensitat de 62,0 dB i es troba a una distància horitzontal de 20,0 m de l'elefant. Determineu a quina altura està situat el segon observador. [1,25 punts]



L'elefant i els dos observadors amagats als arbres.

- 3.2.** En una altra observació es detecten dos elefants separats 10,0 m sobre el pla. Suposant que tots dos emeten un so coherent a una freqüència de 80,0 Hz, i amb la mateixa amplitud i en fase, determineu en quins punts de la línia recta que uneix els dos elefants no es percep cap so. [1,25 punts]

Dades: Velocitat del so en l'aire = 340 m s^{-1} .

$I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

Nota: Assumiu que el front d'ona és esfèric.

▼ Solució

3.1.

Raó d'intensitats. De $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0)$ s'obté $I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}$. Dividint les intensitats dels dos observadors, I_0 se simplifica: $I_1/I_2 = 10^{(\beta_1 - \beta_2)/10} = 10^{3/10} = 10^{0,3} = 1,995$.

Relació amb les distàncies. La potència de l'elefant es reparteix sobre esferes: $I = P/(4\pi r^2)$. Per tant, $I_1/I_2 = (r_2/r_1)^2 \rightarrow r_2 = r_1 \cdot \sqrt{I_1/I_2}$.

Distància de l'elefant a cada observador. L'observador 1 és a $r_1 = \sqrt{(15,0^2 + 5,00^2)} = 15,8 \text{ m}$, i aleshores $r_2 = 15,8 \cdot \sqrt{1,995} = 22,3 \text{ m}$.

Altura del segon observador. $r_2 = \sqrt{(20,0^2 + h^2)} \rightarrow h = \sqrt{(r_2^2 - 20,0^2)} = \sqrt{(22,3^2 - 20,0^2)} = h = 9,94 \text{ m}$ (amb r_2 sense arrodonir).

Com puntua la pauta

- 1 Passar dels nivells a la raó d'intensitats ($I_1/I_2 = 10^{0,3} = 1,995$), relacionar-la amb $(r_2/r_1)^2$, calcular $r_1 = 15,8$ m i obtenir $r_2 = 22,3$ m. També es puntua calcular I_1 i I_2 , la potència ($9,93 \cdot 10^{-3}$ W) i r_2 a partir d' I_2 .

0,25 Calcular l'altura amb Pitàgores: $h = 9,94$ m.

3.2.

Longitud d'ona. $\lambda = v/f = 340/80,0 = \lambda = 4,25$ m.

Punts entre els dos elefants. Per a un punt del segment que uneix els elefants, siguin x_1 i x_2 les distàncies que recorren les ones des de cada elefant fins al punt: $x_1 + x_2 = 10,0$ m.

Condicció d'interferència destructiva. Com que les fonts emeten en fase i amb la mateixa amplitud, no se sent res on la diferència de camins és un nombre semienter de longituds d'ona: $|x_1 - x_2| = (n + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$, amb $n = 0, 1, 2, \dots$

Solucions. Per a $n = 0$: $|x_1 - x_2| = 2,125$ m, i amb $x_1 + x_2 = 10,0$ m s'obté $x_1 = 6,06$ m i $x_2 = 3,94$ m (o a l'inrevés). Per a $n = 1$: $|x_1 - x_2| = 6,375$ m $\rightarrow x_1 = 8,19$ m i $x_2 = 1,81$ m (o a l'inrevés). Per a $n = 2$ la diferència seria 10,625 m, més gran que la separació dels elefants: surt una distància negativa (-0,31 m), fora del segment, i passa el mateix per a valors més grans. Per tant, no se sent res als punts situats a **1,81 m; 3,94 m; 6,06 m i 8,19 m** d'un dels elefants.

Com puntua la pauta

0,25 Calcular la longitud d'ona: $\lambda = 4,25$ m.

0,25 Plantejar que, per a un punt entre els elefants, $x_1 + x_2 = 10$ m.

0,25 Escriure la condició d'interferència destructiva: $|x_1 - x_2| = (n + \frac{1}{2})\lambda$.

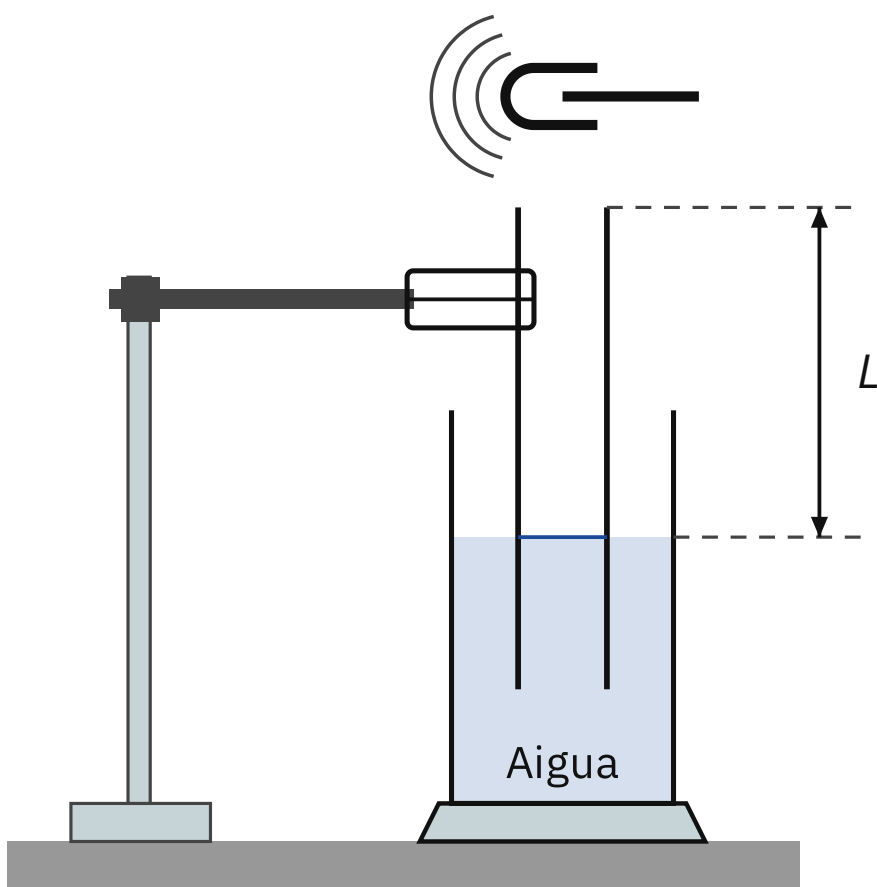
0,5 Resoldre els casos $n = 0$ i $n = 1$ (6,06 m, 3,94 m, 8,19 m i 1,81 m) i descartar els següents. Es resten 0,25 si només es donen la meitat de les solucions.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

52. Ressonància en un tub amb un diapasó de 442 Hz ★★

PAU Setembre 2023 · Sèrie 2 · P3

Duem a terme una experiència de ressonància en un tub amb aigua que consisteix a submergir un tub obert pels dos extrems en un recipient que conté aigua, tal com es mostra en la figura de la dreta. Damunt de l'extrem superior del tub fem vibrar un diapasó, que emet un so de freqüència 442 Hz. La longitud de la columna d'aire (L) s'ajusta elevant el tub fora de l'aigua fins a trobar un punt on es produeix la ressonància (se sent una nota intensa). Comencem l'experiència amb tot el tub submergit i observem la primera ressonància quan $L = 19,3$ cm i la segona ressonància quan $L = 58,0$ cm.



Muntatge de l'experiència de ressonància: el diapasó vibra damunt del tub i L és la longitud de la columna d'aire.

- Dibuixeu la forma de l'ona ressonant per a la primera i segona ressonàncies. Indiqueu en tots dos casos de quin harmònic es tracta i identifiqueu els ventres i els nodes. Justifiqueu per què en tots dos casos la longitud d'ona no varia. Determineu la longitud del tub que ha de quedar per sobre de l'aigua quan ressona el cinquè harmònic. [1,25 punts]
- A partir dels resultats de l'experiència, determineu la velocitat del so a l'aire. Si substituïm l'aigua per glicerina, variarà aquest resultat? Raoneu la resposta. [1,25 punts]

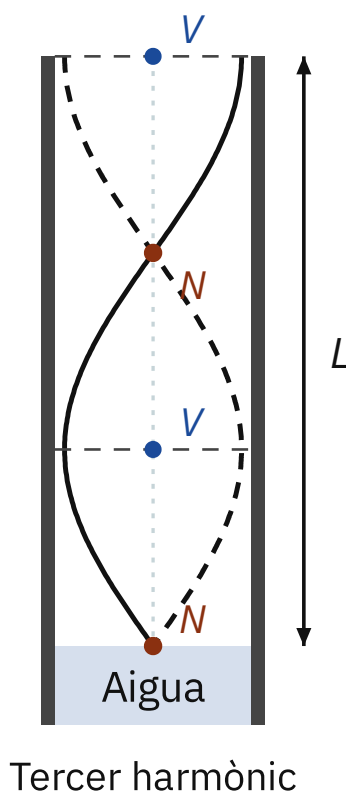
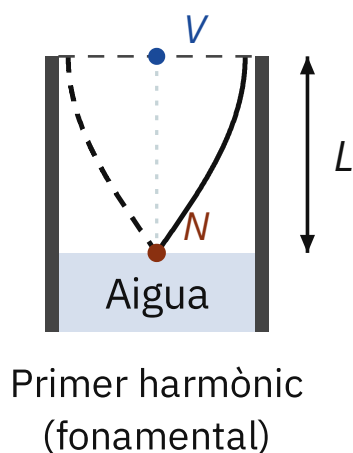
Dades: La velocitat del so a l'aigua és de $1\,493\text{ m s}^{-1}$.

La velocitat del so a la glicerina és de $1\,904\text{ m s}^{-1}$.

▼ Solució

a)

Forma de les ones ressonants. L'extrem de dalt del tub és obert i hi ha un ventre (V); la superfície de l'aigua fa de fons tancat i hi ha un node (N). La columna d'aire es comporta com un tub tancat per un extrem. La ressonància més curta és la que té només un quart de longitud d'ona entre el ventre i el node: és el **primer harmònic (fonamental)**. La següent té tres quarts de longitud d'ona, amb un node i un ventre entremig: és el **tercer harmònic** (en aquest tub no hi ha harmònics parells).

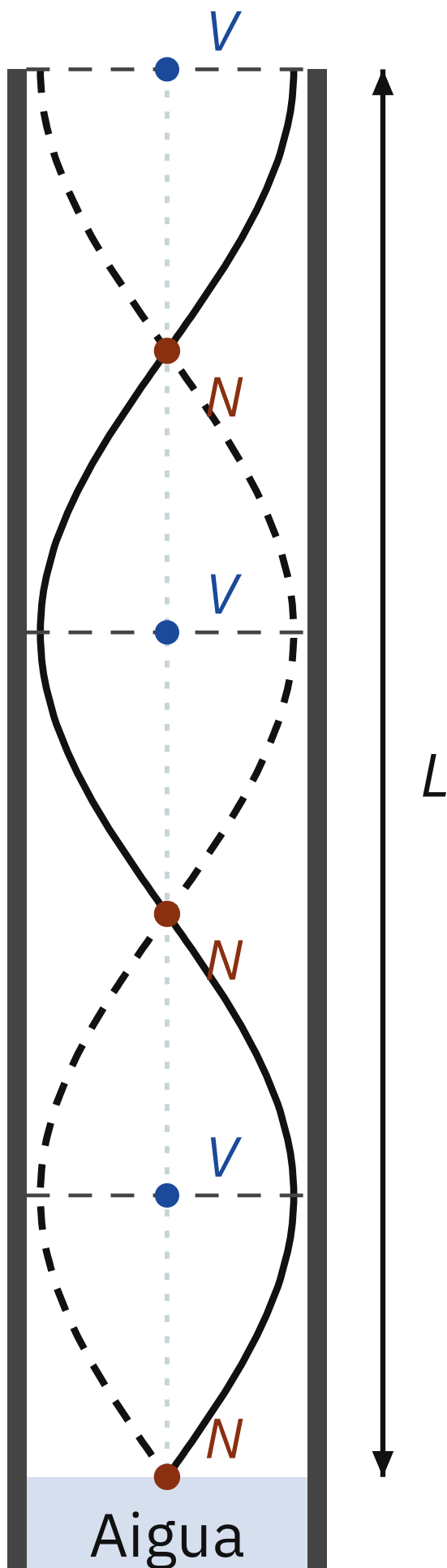


Primera i segona ressonàncies: ventre (V) a l'extrem obert i node (N) a la superfície de l'aigua.

Longituds d'ona. Primer harmònic: $L = \lambda/4 \rightarrow \lambda_1 = 4L = 4 \cdot 0,193 = 0,7720$ m. Tercer harmònic: $L = \lambda_3/4 + \lambda_3/2 = 3\lambda_3/4 \rightarrow \lambda_3 = 4L/3 = 4 \cdot 0,580/3 = 0,7733$ m.

Per què la longitud d'ona no varia. Totes dues ressonàncies les provoca el mateix diapasó, de manera que la freqüència és la mateixa (442 Hz), i l'ona es propaga pel mateix medi, l'aire, amb la mateixa velocitat c . Com que $\lambda = c/f$, la longitud d'ona també ha de ser la mateixa; el que canvia és quantes vegades $\lambda/4$ caben a la columna.

Cinquè harmònic. Ara hi caben cinc quarts de longitud d'ona: $L = \lambda_5/4 + \lambda_5 = 5\lambda_5/4$. Prenent la mitjana dels dos valors anteriors, $\lambda = 0,7727$ m: $L = 5 \cdot 0,7727/4 = 0,966$ m de tub per sobre de l'aigua. També és vàlid fer-ho amb λ_1 o amb λ_3 .



Cinquè harmònic

Cinquè harmònic: $L = 5\lambda/4$.

Com puntua la pauta

- 0,7** Dibuixar les dues ressonàncies amb els nodes (a l'aigua) i els ventres (a l'extrem obert) i identificar-les com el primer i el tercer harmònic. Es resten 0,2 per nodes mal identificats, 0,2 per ventres, 0,1 si no es diu que la primera és el primer harmònic i 0,2 si no es diu que la segona és el tercer.
- 0,15** Calcular $\lambda_1 = 4L = 0,7720$ m i $\lambda_3 = 4L/3 = 0,7733$ m.
- 0,2** Justificar que λ no varia perquè la freqüència i la velocitat de propagació són les mateixes ($\lambda = c/f$).
- 0,2** Obtenir la longitud per al cinquè harmònic, $L = 5\lambda/4 = 0,966$ m.

b)

Velocitat del so a l'aire. $c = \lambda \cdot f = 0,7727 \cdot 442 = 341,5$ m/s $\approx$ **340** m/s.

Amb glicerina. No variarà. L'ona que ressona i que sentim es propaga per la columna d'aire; el líquid només fa de fons tancat on hi ha el node. La velocitat de propagació és la del so a l'aire en tots dos casos, uns 340 m/s, i les dades de la velocitat del so a l'aigua i a la glicerina no hi intervenen.

Com puntua la pauta

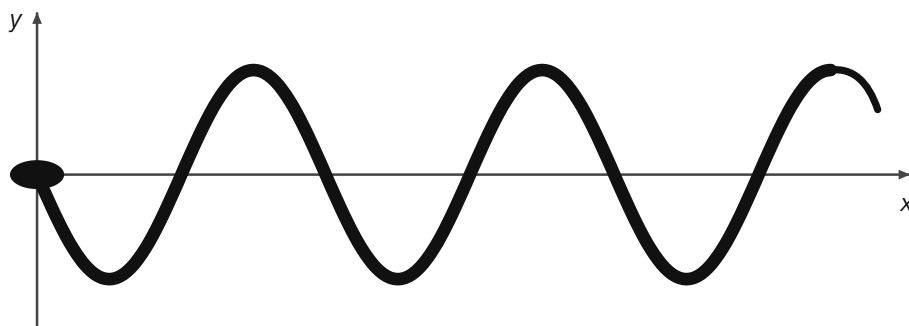
- 0,65** Calcular la velocitat del so a l'aire, $c = \lambda \cdot f \approx 340$ m/s.
- 0,6** Raonar que no varia perquè l'ona es propaga per l'aire i la velocitat és la mateixa en tots dos casos.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

53. L'ona que recorre el cos d'una anguila ★★

PAU Juny 2022 · Sèrie 2 · P3

El moviment d'una anguila es pot aproximar al d'una ona harmònica transversal que es propaga des del cap fins a la cua. Per a estudiar-ne el moviment hem de simplificar: no considerem l'aportació al moviment de la resta de músculs del cos, i suposem, simplement, que l'ona es genera al cap de l'anguila, que vibra amb una freqüència de 0,50 Hz i amb una amplitud de 5,00 cm. La distància entre dos punts consecutius del cos de l'anguila que estan en el mateix estat de vibració és de 20,0 cm.



L'anguila i el sistema de coordenades: el cap és sempre a l'origen i l'ona avança cap a les x positives.

- a) Calculeu la velocitat a la qual es propaga l'ona pel cos de l'anguila, la freqüència angular i el nombre d'ona. Si a l'instant inicial el cap té una elongació zero i la velocitat d'oscil·lació transversal és positiva, determineu l'expressió de l'equació d'ona. Per a l'equació d'ona utilitzeu el sistema de coordenades de la figura superior, on el cap de l'anguila es troba sempre a l'origen de les abscisses. [1,25 punts]
- b) A partir de l'equació d'ona, deduiu i calculeu els mòduls de la velocitat i de l'acceleració màximes de l'oscil·lació transversal. Si la longitud total de l'anguila és de 58,0 cm, calculeu també la velocitat i l'acceleració transversals a la cua 10 s més tard d'haver iniciat el moviment. [1,25 punts]

▼ Solució

a)

Longitud d'ona. Dos punts consecutius que vibren igual (en el mateix estat de vibració) estan separats exactament una longitud d'ona: $\lambda = 20,0 \text{ cm} = 0,20 \text{ m}$.

Velocitat de propagació. $v = \lambda \cdot f = 0,20 \cdot 0,50 = 0,10 \text{ m/s}$.

Freqüència angular. $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,50 = \pi \text{ rad/s} = 3,14 \text{ rad/s}$.

Nombre d'ona. $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,20 = 10\pi \text{ m}^{-1} = 31,4 \text{ m}^{-1}$.

Forma general de l'ona i velocitat transversal. L'ona viatja cap a les x positives, de manera que la podem escriure $y(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$. Derivant respecte del temps obtenim la velocitat d'oscil·lació transversal: $v(x, t) = \partial y / \partial t = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$.

Condicció d'elongació nul·la. El cap ($x = 0$) té elongació zero a $t = 0$: $y(0, 0) = A \cdot \sin \varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ rad}$ o bé $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

Condicció de velocitat positiva. $v(0, 0) = -A\omega \cdot \cos \varphi_0$. Amb $\varphi_0 = 0$ surt $v(0, 0) = -A\omega < 0$, que no compleix l'enunciat; amb $\varphi_0 = \pi$ surt $v(0, 0) = +A\omega > 0$. Per tant, $\varphi_0 = \pi$ rad.

Equació d'ona. Amb $A = 0,05$ m: $y(x, t) = 0,05 \cdot \sin(10\pi x - \pi t + \pi)$, amb x i y en m i t en s, que és el mateix que $y(x, t) = 0,05 \cdot \sin(\pi t - 10\pi x)$. Si es parteix del cosinus, $y = A \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$, les mateixes condicions donen $\varphi_0 = \pi/2$ rad: $y(x, t) = 0,05 \cdot \cos(10\pi x - \pi t + \pi/2)$. També són vàlides les fases escrites com $\omega t - kx + \varphi_0$, $k(x - vt) + \varphi_0$ o $2\pi(x/\lambda - t/T) + \varphi_0$.

Com puntua la pauta

- 0,1 Identificar la distància entre punts en el mateix estat de vibració amb la longitud d'ona, $\lambda = 0,20$ m.
- 0,1 Calcular la velocitat de propagació, $v = \lambda \cdot f = 0,1$ m/s.
- 0,1 Calcular la freqüència angular, $\omega = \pi$ rad/s.
- 0,1 Calcular el nombre d'ona, $k = 10\pi$ m⁻¹.
- 0,85 Escriure l'equació d'ona i trobar-ne la fase inicial amb les dues condicions inicials ($\varphi_0 = \pi$ amb el sinus). Es resten 0,25 punts si no s'analitza la condició d'elongació nul·la i 0,25 si no s'analitza la de velocitat positiva.

b)

Velocitat transversal màxima. Derivem l'equació d'ona respecte del temps: $v(x, t) = \partial y / \partial t = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$. El mòdul és màxim quan el cosinus val ± 1 : $v_{\text{màx}} = A\omega = 0,05 \cdot \pi = 0,157$ m/s.

Acceleració transversal màxima. Tornem a derivar: $a(x, t) = \partial v / \partial t = -A\omega^2 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$. El mòdul és màxim quan el sinus val ± 1 : $a_{\text{màx}} = A\omega^2 = 0,05 \cdot \pi^2 = 0,493$ m/s².

Velocitat a la cua. La cua és a $x = 0,58$ m. A $t = 10$ s: $v(0,58; 10) = -0,157 \cdot \cos(10\pi \cdot 0,58 - \pi \cdot 10 + \pi) = 0,127$ m/s.

Acceleració a la cua. $a(0,58; 10) = -0,493 \cdot \sin(10\pi \cdot 0,58 - \pi \cdot 10 + \pi) = -0,290$ m/s².

Com puntua la pauta

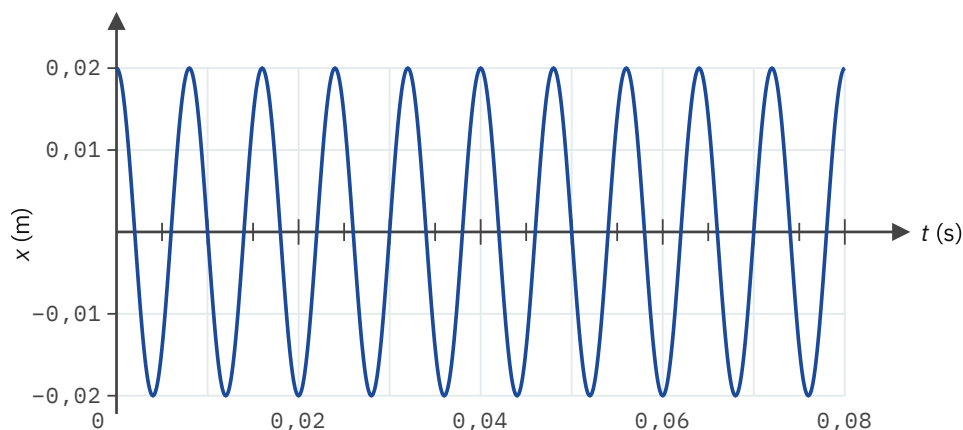
- 0,35 Derivar l'equació d'ona per obtenir $v(x, t)$ i deduir-ne el valor màxim, $A\omega = 0,157$ m/s (no val donar l'expressió directament).
- 0,3 Derivar $v(x, t)$ per obtenir $a(x, t)$ i deduir-ne el valor màxim, $A\omega^2 = 0,493$ m/s².
- 0,3 Calcular la velocitat transversal de la cua a $t = 10$ s: 0,127 m/s.
- 0,3 Calcular l'acceleració transversal de la cua a $t = 10$ s: -0,290 m/s².

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

54. Gràfica x-t d'un MHS i el so que genera ★★

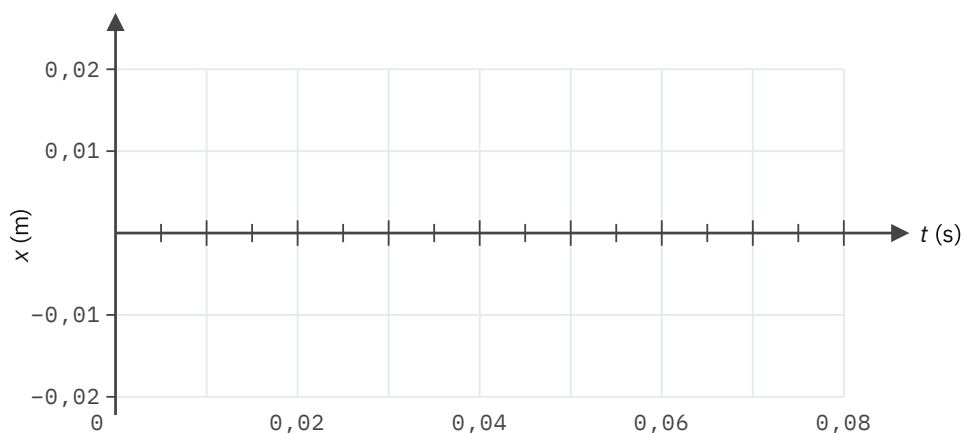
PAU Setembre 2018 · Sèrie 3 · P2

La figura mostra la gràfica posició-temps d'un objecte que descriu un moviment harmònic simple (MHS).



Posició de l'objecte en funció del temps.

- a) Determineu l'amplitud i la freqüència i escriviu l'equació del moviment $x(t)$, incloent-hi totes les unitats. Representeu la gràfica $x-t$ d'un moviment harmònic simple (MHS) que tingui la mateixa amplitud però la meitat de freqüència (les escales dels eixos han d'estar indicades clarament). [1 punt]



Eixos per dibuixar-hi la gràfica demanada (mateixes escales que la figura de l'enunciat).

- b) Les vibracions de l'objecte generen una ona sonora en el medi que l'envolta. Quins efectes sobre la freqüència i la longitud d'ona d'aquesta ona sonora tindran els canvis següents?
- L'ona es reflecteix en una superfície. [0,3 punts]
 - L'ona passa de l'aire a l'aigua (on la velocitat del so és més gran). [0,3 punts]
 - El focus sonor es posa en moviment en direcció a nosaltres. [0,4 punts] [1 punt]

▼ Solució

a)

Amplitud. El valor màxim de la posició a la gràfica és $A = 0,02$ m.

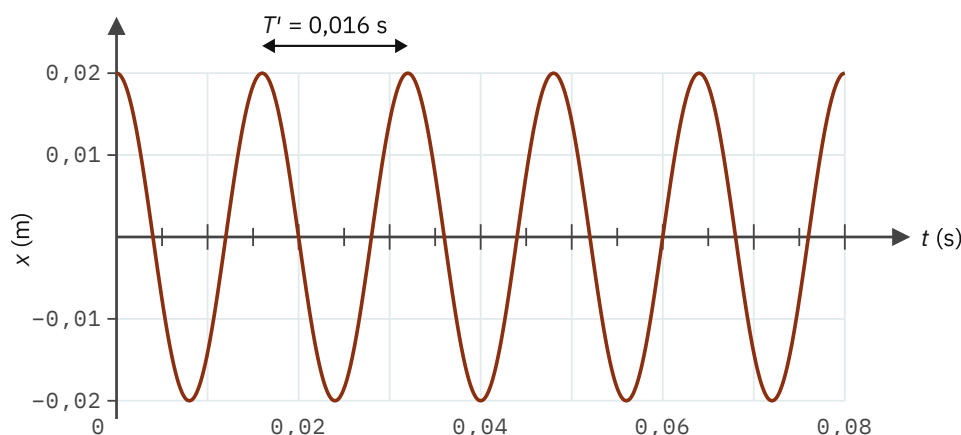
Període i freqüència. Entre $t = 0$ i $t = 0,04$ s hi ha 5 oscil·lacions completes, per tant $T = 0,04/5 = 0,008$ s i $f = 1/T = 1/0,008 = 125$ Hz.

Equació general. Escrivim $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f \cdot t + \theta_0)$. A $t = 0$ l'objecte és a $x = +A$, de manera que amb el cosinus la fase inicial és $\theta_0 = 0$.

Equació amb valors. $2\pi f = 2\pi \cdot 125 = 250\pi$ rad/s ≈ 785 rad/s, i queda

$x(t) = 0,02 \cdot \cos(250\pi \cdot t)$, amb x en m i t en s. Amb el sinus caldria una fase de $\pi/2$ rad: $x(t) = 0,02 \cdot \sin(250\pi \cdot t + \pi/2)$.

Gràfica amb la meitat de freqüència. Ara $f' = 125/2 = 62,5$ Hz i el període es duplica: $T' = 1/62,5 = 0,016$ s. Amb la mateixa amplitud (0,02 m) i la mateixa fase inicial, la corba comença al màxim i fa 5 oscil·lacions completes en 0,08 s (la meitat que l'original).



MHS amb la mateixa amplitud i la meitat de freqüència: $f' = 62,5$ Hz, $T' = 0,016$ s.

Com puntua la pauta

0,1 Llegir l'amplitud, $A = 0,02$ m.

0,2 Obtenir el període (0,008 s) i la freqüència, $f = 125$ Hz.

0,1 Escriure la forma general $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f \cdot t + \theta_0)$.

0,2 Escriure l'equació amb els valors i les unitats, $x(t) = 0,02 \cdot \cos(250\pi \cdot t)$ m (o l'equivalent amb sinus).

0,2 Dibuixar correctament la gràfica nova, amb les escales indicades.

0,2 Indicar la nova freqüència (62,5 Hz) i el nou període (0,016 s).

b)

Reflexió. L'ona reflectida continua en el mateix medi, amb la mateixa velocitat, i la freqüència la fixa la font: **ni la freqüència ni la longitud d'ona no canvien.**

Pas de l'aire a l'aigua. La freqüència depèn només de la font, de manera que no varia. La velocitat augmenta i, com que $\lambda = v/f$,

la freqüència es manté i la longitud d'ona augmenta.

Font que s'acosta. És l'efecte Doppler: la font s'acosta mentre emet i els fronts d'ona que ens arriben són més junts.

Percebem una freqüència més gran i una longitud d'ona més petita.

Com puntua la pauta

0,3 Reflexió: la freqüència i la longitud d'ona no canvien.

0,3 Aire → aigua: la freqüència no canvia i la longitud d'ona augmenta.

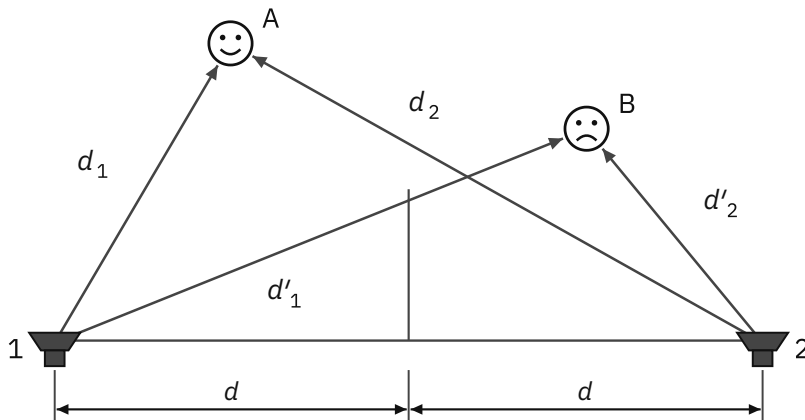
0,4 Font que s'acosta (Doppler): la freqüència percebuda augmenta i la longitud d'ona disminueix.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

55. Freqüències que una persona sent i l'altra no ★★★

PAU Setembre 2024 · Sèrie 3 · P2

Dos altaveus estan separats entre si una distància $2d$ i emeten un senyal harmònic i en fase. Produïm el so amb un generador de senyals que podem ajustar entre els 200 i els 400 Hz. La persona A està situada a $d_1 = 5,00$ m de l'altaveu 1 i a $d_2 = 8,68$ m de l'altaveu 2. Una segona persona B està situada a $d'_1 = 8,14$ m de l'altaveu 1 i a $d'_2 = 4,00$ m de l'altaveu 2.



Els dos altaveus i les posicions de les persones A i B.

- Calculeu totes les freqüències que podem escollir en el generador perquè la persona A senti els senyals amb una intensitat màxima.
Quina freqüència de les anteriors hem d'escollir perquè la persona A senti el senyal amb intensitat màxima i la persona B no el pugui sentir (és a dir, el senti amb intensitat mínima)?
[1,25 punts]
- Ara emetem música pels dos altaveus amb una potència de $2,36 \times 10^{-3}$ W cadascun. Calculeu la intensitat sonora generada per cada altaveu en la posició de la persona A. Determineu el nivell d'intensitat sonora que percep aquesta persona. [1,25 punts]

Nota: Considereu que les ones sonores es propaguen en les tres dimensions de l'espai i que la seva energia es distribueix en superfícies esfèriques.

Dades: $I_0 = 10^{-12}$ W m⁻².

Velocitat del so en l'aire: 340 m/s.

Superfície esfèrica: $4\pi r^2$.

▼ Solució

a)

Condició de màxim a A. A cada persona li arriben les dues ones, que interfereixen. Com que els altaveus emeten en fase, la intensitat a A és màxima (interferència constructiva) si la diferència de camins és un nombre enter de longituds d'ona: $|d_2 - d_1| = 8,68 - 5,00 = 3,68$ m = $n \cdot \lambda$, amb n enter.

Freqüències corresponents. De $\lambda = 3,68/n$ i $f = v/\lambda$: $f = n \cdot 340/3,68 = n \cdot 92,4$ Hz.

Freqüències entre 200 i 400 Hz. Per a $n = 2$ surt 185 Hz i per a $n = 5$, 462 Hz, fora de l'interval. Només serveixen $n = 3$ i $n = 4$: $f = 277,2 \text{ Hz}$ i $f = 369,6 \text{ Hz}$.

Condicció de mínim a B. Perquè B no senti el so cal interferència destructiva a B: la diferència de camins ha de ser un nombre semienter de longituds d'ona, $|d'_2 - d'_1| = 8,14 - 4,00 = 4,14 \text{ m} = (n + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$.

Freqüències corresponents. $f = v/\lambda = (n + \frac{1}{2}) \cdot 340/4,14 = (n + \frac{1}{2}) \cdot 82,1 \text{ Hz}$.

Freqüències entre 200 i 400 Hz i freqüència comuna. Per a $n = 2, 3$ i 4 s'obté $f = 205,3 \text{ Hz}$; $287,4 \text{ Hz}$; $369,6 \text{ Hz}$. L'única freqüència que compleix alhora les dues condicions és $f = 369,6 \text{ Hz}$: A sent el so amb intensitat màxima i B amb intensitat mínima.

Com puntua la pauta

0,15 Relacionar la intensitat màxima a A amb la interferència constructiva: $|d_2 - d_1| = 3,68 \text{ m} = n\lambda$.

0,1 Expressar les freqüències: $f = n \cdot 340/3,68 \text{ Hz}$.

0,25 Trobar les de l'interval 200–400 Hz: 277,17 Hz i 369,56 Hz.

0,15 Relacionar el mínim a B amb la interferència destructiva: $|d'_2 - d'_1| = 4,14 \text{ m} = (n + \frac{1}{2})\lambda$.

0,1 Expressar les freqüències: $f = (n + \frac{1}{2}) \cdot 340/4,14 \text{ Hz}$.

0,5 Trobar les de l'interval (205,31 Hz, 287,44 Hz i 369,56 Hz) i veure que 369,56 Hz compleix les dues condicions.

b)

Intensitat de cada altaveu a A. L'energia de cada altaveu es reparteix sobre una esfera de radi igual a la distància: $I_1 = P/(4\pi d_1^2) = 2,36 \cdot 10^{-3}/(4\pi \cdot 5,00^2) = 7,51 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$; $I_2 = P/(4\pi d_2^2) = 2,36 \cdot 10^{-3}/(4\pi \cdot 8,68^2) = 2,49 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

Intensitat total. La intensitat que rep A és la suma de les dues: $I = I_1 + I_2 = 7,51 \cdot 10^{-6} + 2,49 \cdot 10^{-6} = 1,00 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

Nivell d'intensitat sonora. $\beta = 10 \cdot \log(I/I_0) = 10 \cdot \log(10^{-5}/10^{-12}) = \beta = 70 \text{ dB}$.

Com puntua la pauta

0,5 Calcular la intensitat de cada altaveu a A amb $I = P/(4\pi d^2)$: $7,51 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ i $2,49 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

0,25 Sumar les intensitats: $I = 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

0,5 Calcular el nivell d'intensitat sonora: $\beta = 70 \text{ dB}$.

Pauta oficial: [PDF de correcció](#), obert en aquest problema.

Convenis: unitats del SI, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ a la Terra i fricció menyspreable. Els arguments de sinus i cosinus són en radians.

Els enunciats i els criteris de correcció de les PAU són oficials (Generalitat de Catalunya) i es reproduïxen d'acord amb les condicions de reutilització de la informació del sector públic. Cada problema enllaça a l'examen original.

Materials elaborats per [Nil Munté Guerrero](#) · [nil-munte.github.io](#) · [LinkedIn](#)

[Escriu-me](#) · nilmunte@gmail.com